# CORSO

DI

## GEOMETRIA ELEMENTARE

DIVISO IN DUE VOLUMI

---

## APPENDICE

Che contiene la Trigonometria Rettilinea, e Sferica.

# ELEMENTI
DI
# TRIGONOMETRIA
RETTILINEA, E SFERICA

NAPOLI
Presso i fratelli Chianese
1813.

# AVVERTIMENTO.

Dopo di aver pubblicata la parte elementare della Geometria, mi sono veduto nell' obbligo di acconsentire alle dimande che mi sono state fatte da diverse Scuole, le quali hanno adottato un tal Corso, di pubblicare la Trigonometria Sferica, ch'era loro indispensabile d'insegnare. Questo piccolo, e special ramo di scienze Matematiche aveva ancor bisogno di esser ridotto in una convenevol forma elementare, affinchè i giovani i quali debbono apprenderla dopo gli Elementi di Euclide, non restassero ad un tempo sopraffatti, dall' usar metodi approssimanti, e dal non stretto rigor geometrico nel nesso delle proposizioni, e nella maniera di dimostrarle. Con quanta ragione ciò dica, potrà rilevarsi dal vedere generalmente dimostrata, e da accorti Geometri, la teoria dell' uguaglianza de' triangoli sferici, ed alcune altre proprietà di essi, che da tal teoría derivansi, cogli stessi principj che quella de' triangoli rettilinei; quando che questi, esistendo in un piano, possonsi sempre ridurre ad esser similmente disposti; il che non può avvenir ne' primi. Inoltre i principj per la loro riso-

luzione erano in generale vaghi, e soggetti nell' applicarsi, ad indurre talvolta in equivoco anche coloro, che sono sommamente versati in tal genere di ricerche. Ad evitar quest' altro inconveniente, il sommo Eulero, che non obbliò mai in mezzo a tante sue sublimi investigazioni, che il principal merito de' lavori di un Geometra consiste in facilitar l' intelligenza delle scienze Matematiche, occupatosi della Trigonometria Sferica in una Memoria inserita negli Atti dell' Accademia di Pietroburgo per l' anno 1789, stabilì un principio, dal quale ne dedusse le principali condizioni della risoluzione de' triangoli sferici. Questo mezzo dall' Eulero adoperato, per mettere uniformità in una tale scienza, è stato da me prescelto; ed in tal modo l' intera Trigonometria Sferica viene ad esser compresa in tre Teoremi facilissimi a ritenersi, non che a dimostrarsi. Ma i libri elementari, siccome da una parte non debbono essere sì minuti da opprimere l' intendimento de' giovani, che gli studiano; così dall' altra non convien che siano sì brevi da tralasciare qualunque sviluppo si possa loro dare de' metodi, o delle teorie generali. Quindi non credo di aver agito fuor di proposito aggiungnendo a' Teoremi de' quali poc' anzi parlava alcune semplificazioni, delle quali essi sono suscettibili pe' triangoli sferici rettangoli; e nell' aver trattato di alcuni altri tri-

angoli sferici, che possono ricevere delle speciali soluzioni. Or qualunque merito di semplicità, e di rigore possano avere le formole trigonometriche val nulla, allorchè non si trovan capaci a facilmente adattarcisi il calcolo logaritmico, del quale si fa uso nella risoluzione de' triangoli; e questa verità, che non poteva certamente sfuggire all' Eulero, gli fece soggiugnere alle formole da lui rinvenute un acconcia riduzione, perchè facile se ne rendesse la poc' anzi detta applicazione. Intanto queste riduzioni Euleriane riconducevano le sue formole a quelle regole, che con gran maestria espose la prima volta il Nepero nel suo dottissimo libro *Logaritmorum Canonis descriptio*; ed io ho voluto in questa parte seguir l'esempio del Geometra Scozzese, come può vedersi alla fine della mia Trigonometria Sferica.

E poichè non era possibile il dare un compiuto Trattato di Trigonometria Sferica, senza far lo stesso della Trigonometria Rettilinea, ho perciò dovuto occuparmi di questa un poco più di quel che non si era fatto, allorchè l'aggiunsi in fine al secondo volume della prima edizione del Corso.

Per non lasciar senza applicazione le due Trigonometrie, aveva stabilito di unirvi un breve Trattato di Geodesia, ed una Raccolta di pochi, ma importanti Problemi di Geogra-

sia Matematica, di Astronomia, e di Navigazione, e qualche cosa aveva già preparata di questo lavoro, che sono stato obbligato a sospender per ora; poichè le mie non lievi occupazioni d'obbligo, mi lasciano ben poco tempo da impiegare in altre cose.

---

## *ERRATA.*

| Pag. | linea | | *leggasi* |
|---|---|---|---|
| 14 | 9 | delle grandezze, | grandezze |
| 16 | 7 | 60° | 60′ |
| 20 | 1 | RS | RN |
| 36 | 27 | in effetti | in effetto |
| 37 | 14 | in dove | dove |
| | E lo stesso alla pag. 43 linea 20 | | |
| 61 | 19 | *me* | *come* |
| 65 | Al n°. 114 vi corrisponde la fig. 15 | | |
| 70 | Al n°. 118 | | la fig. 16 |
| 73 | 4 | golo | angolo |
| 76 | 12 | (N.4) | (dim.N.3) |
| | E lo stesso per la pag. 77 lin. 11 | | |
| 78 | 4 | *gli sono adjacenti* | *lo comprendono* |

In qualche Tavola, nella fig.13 bisogna prolungare la retta K*e* finchè incontri la circonferenza ALB in E, e porre intorno alla circonferenza ABK la lettera C. E nella fig. 14 bisogna segnare con A, D due punti nella circonferenza del cerchio inferiore.

# PREFAZIONE.

In ogni triangolo, oltre allo spazio che vi si contiene, vi son pure, come l' è noto, tre lati, e tre angoli: e queste sei grandezze han tal nesso fra di loro, che datè tre di esse, se pur queste non sieno i soli angoli della figura, si possono le altre tre geometricamente, ed in facil modo rilevare, come si ha dagli Elementi di Euclide. Ma non è così di loro, quando con valori aritmetici le une si propongano, e nella stessa divisa le altre vi si chieggan da esse. Imperciocchè essendo trascendente il rapporto de' lati di un triangolo agli angoli, ch' essi sottendono, niuna regola per l' indagine suddetta può mai sperarsi. Ma la risoluzione del triangolo, in che consiste cotesta special ricerca, è la base delle scienze geodetiche, ed astronomiche, ed ella nelle matematiche si pure, che miste ancor s' impiega lodevolmente. Qual ripiego dunque n' escogitarono a tal uopo i Geometri antichi, o quale ne hanno supplito i moderni?

*Essi adottano certe funzioni dell' angolo, che soglion dirsi linee trigonometriche*. Dipoi *propongono una tavola di corrispondenza tra' valori degli angoli, e quelli delle loro funzioni*. E finalmente *prescrivono certi rapporti di esse funzioni a' lati di un triangolo, onde da quelli in facil modo la risoluzione della detta figura si ritragga*. Dunque le parti essenziali di questa scienza non

son che due, cioè quella fissazione di valori corrispondenti; e le regole dell' effettiva risoluzione del triangolo. La prima, che suol chiamarsi *Canone trigonometrico*, si eseguiva dagli antichi con operazioni aritmetiche a certe grandezze geometriche applicate: ed ora quei valori aritmetici da alcune analitiche espressioni si rilevano. E sì gli uni, che gli altri risultati non sono, che approssimanti.

Intanto è da dolersi, che la più parte de' Trigonometri non abbiano curato di avvertir queste cose a' giovanetti, non senza loro nocumento. Imperocchè nella parte elementare della Geometria, e nella sublime non si contemplano, che le sole geometriche grandezze; e con metodi esatti e rigorosi tutto vien quivi rilevato, proposto, e dimostrato. Laddove nella *Trigonometria* rinvengonsi certe grandezze continue in valori aritmetici, e co' metodi approssimanti risolvonsi i problemi. Ed i giovani passan di volo dall' un metodo all' altro, e da questo a quello ne ripiegano, ora contemplando le grandezze continue nella lor natura, ed ora sotto mentita forma di discrete; e spesso non v' è chi di quel divario gli avverta. Era dunque necessario, non solo per ragion di scienza; ma per utile de' giovani, premetter queste nozioni agli Elementi di Trigonometria, che quì imprendo a divisare brevemente, e con chiarezza.

# ELEMENTI

## DI TRIGONOMETRIA PIANA

### DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

1. *Def.* I. I valori numerici de' lati, e degli angoli di un triangolo si possono chiamare *parti* di esso. E ciò secondo la frase de' Geometri antichi.

2. *Def.* II. *Risolvere un triangolo* è il rinvenir tre delle sei parti del triangolo dalle altre tre, che sien date; se pur queste non sieno i soli tre angoli della figura.

3. *Cor.* Quando sien dati i tre soli angoli della figura, non vi si potran da essi investigare i valori de' lati; ma si bene la di loro proporzione. Imperocchè ella è in tal caso data di sola specie, e può averne infinite, che le sieno equiangole.

4. *Def.* III. La *Trigonometria Piana*, o *Rettilinea* è una scienza, che propone le regole per risolvere un triangolo.

5. *Scol.* Le regole dell'anzidetta risoluzione non intercedono tra i lati, e tra gli angoli del triangolo. Imperocchè il rapporto di quelle grandezze a queste è trascendente, e tal sarebbe altresì ogni operazione, che tra esse si prescriverebbe a quest' uopo. Quindi è, che i tre lati di un triangolo, ed i tre angoli di esso, che son le sei parti

di tal figura, non solamente differiscono gli uni dagli altri nella natura; ma i rapporti loro son puranche trascendenti. E qual mezzo ne han tenuto i Geometri per la suddetta risoluzione? Eccolo.

Qui soglionsi adottare certe rette, che diconsi *linee trigonometriche*, *funzioni degli angoli*, o *grandezze vicarie di essi*. Se ne descrive la lor natura, il modo d' indagarle, e la loro corrispondenza agli angoli rispettivamente. Di poi le regole della riferita risoluzione propongonsi tra' lati del triangolo, e tra le linee trigonometriche suddette. E nella prima, e nella seconda parte di questa teoria mostrerò chiaramente sì l' uno, che l' altro di questi due nobilissimi artifizj. Prima d' ogn' altro però è necessario che qualche cosa si dica.

## DELLA MISURA DEGLI ANGOLI, E DELLA DIVISIONE DELLA CIRCONFERENZA.

6. Siccome gli angoli posti al centro di un cerchio serbansi la stessa ragione, che gli archi da' quali sono sottesi (33.VI.); si posson perciò questi prender benissimo per misura di quelli. Quindi per ridurre sì gli angoli, che gli archi a grandezze discrete, il che molto interessa gli usi trigonometrici, e le operazioni di Geodesia, i Geometri hanno supposto che il cerchio sia diviso in un determinato numero di parti. E siccome per la costruzione del canone trigonometrico, del quale or ora parleremo, era anche molto impor-

tante, che tal numero di parti in cui si suppone divisa la circonferenza ammettesse un gran numero di divisori esatti; perciò essi scelsero il 360. Ciascuna di tali parti, che si chiama *grado*, la supposero poi divisa in 60 altre parti, chiamate *minuti primi*: e così ciascun minuto primo lo suddivisero in 60 *secondi*, ciascun secondo in 60 *terzi* ec.

Ad indicare i gradi, i minuti primi, i secondi, ec. sogliono i Trigonometrici servirsi del °, ′, ″ nel modo seguente; così per esprimere un arco, o un angolo di 55 gradi, 23 minuti primi, e 44 secondi, scrivono 55° 23′ 44″.

L' indicata divisione del cerchio ha servito lungo tempo, e vantaggiosamente tutti coloro, che hanno dovuto avvalersi della Trigonometria per applicarla alla Geodesia, all' Astronomia, ed alla Navigazione, nè alcun inconveniente osservavasi nel maneggio delle ordinarie *Tavole de' seni*. Intanto uno spirito di novità ha fatto ultimamente cambiare questa divisione della circonferenza in un' altra decimale, che da circa un secolo era stata progettata dal Keill; vale a dire si è divisa la circonferenza in 400 parti, e poi ciascuna di queste, che si è anche chiamata *grado*, si è successivamente divisa in 100 minuti primi, secondi, ec. e con questa nuova divisione si sono anche costruite dal Sig. Borda delle Tavole de' seni; e delle altre anche più estese ne ha poi fatte eseguire il Sig. Prony; ma che per la loro estrema lunghezza non si sono pubblicate. Or siccome questa nuova divisione, oltre al non aver alcun vantaggio

deciso sull' antica , offre di più il grande inconveniente di doversi continuamente ridurre que' calcoli in cui si è fatto uso dell' antica divisione , e de' quali conviene avvalersi qualche volta ; perciò essa non è stata generalmente adottata: e noi pensiamo con molti dotti Trigonometri moderni, non escluso il Cagnoli , che valga meglio servirsi dell' antica .

Per completare la misura degli angoli per gli archi di cerchio, stabiliremo i seguenti due Teoremi .

## PROPOSIZIONE I.

### TEOREMA.

7. *Tutti gli archi di cerchio descritti tra i lati di un angolo, preso per centro il suo vertice , contengono lo stesso numero di gradi e minuti .*

Sia l' angolo BCR (*fig*.1), e tra i suoi lati vi sieno descritti co' raggi CB , C*b* , e col medesimo centro C gli archi circolari BR , *br* , e di più sien completati i quadranti BAC , *ba*C ; starà l' angolo BCR all' angolo BCA , come l' arco BR all' altro BA ( 33. VI. ) . E similmente l' angolo *b*C*r* sta all' altro *b*C*a* , come l' arco *br* all' arco *ba* . Ma l' angolo BCR sta all' altro BCA , come l' angolo *b*C*r* all' altro *b*C*a* : dunque sarà pure l' arco BR all' arco BA, come l' arco *br* all' arco *ba*; cioè il numero de' gradi e minuti di BR starà a 90° , come il numero de' gradi e minuti di *br* a 90° .

Laonde gli archi BR, $br$ dovranno essere dello stesso numero di gradi e minuti. C. B. D.

8. Cor. Da ciò si vede che qualunque sia il raggio di un cerchio, non si cambia mai quel numero, ch' esprime il valore di un angolo, ch' è al centro di questo.

## PROPOSIZIONE II.

### TEOREMA.

9. *Due angoli disuguali posti a' centri di due disuguali cerchi, sono tra loro in ragion composta da quella degli archi che li sottendono, e dall' inversa de' raggi de' cerchi.*

Sieno i due angoli BCS, $bCr$ (*fig.*2) posti a' centri di due cerchi, che abbiano disuguali i raggi CB, $Cb$, e che si suppongano descritti intorno al comune centro C. È manifesto che l' angolo BCS stia all' altro BCR, come l' arco BS all'arco BR (33.VI.), Ma è poi BS a BR in ragion composta di BS: $br$, e di $br$ a BR (d.A.V.), ossia di BS a $br$, e di $Cb$ a CB. Dunque starà pure l' angolo BCS all' altro BCR, cioè a $bCr$, in ragion composta dalla ragion degli archi BS, $br$ che gli sottendono, e dalla reciproca de' raggi $Cb$, CB di que' cerchi intorno a cui centri essi sono posti. C.B.D.

# PARTE I.

## DELLA NATURA, ED INDAGINE DELLE LINEE TRIGONOMETRICHE.

10. *Def.* IV. *Complemento di un arco* è la differenza di esso dal quadrante.

E *supplemento di un arco* è la differenza di esso dalla semicirconferenza.

Così l' arco di 30° tien per complemento quello di 60°, e 'l complemento di 60° e l' arco di 30°.

E l' arco di 150° è il supplemento di quello di 30°.

11. *Def.* V. *Seno d' un arco* è la perpendicolare, che si abbassa da un suo estremo sul raggio, che passi per l' altro estremo. Questo seno suol dirsi *seno retto*, o *seno primo*.

12. *Cor.* Il seno d' un arco è lo stesso di quello del di lui supplemento.

13. *Def.* VI. *Tangente d' un arco* è quella retta, che il tocca in un suo estremo, e si distende insino al raggio prodottovi per l' altro estremo.

14. Def VII. E tal raggio prodotto insino alla tangente di un arco, si dirà di lui *segante*.

15. *Def.* VIII. Il *coseno di un arco* è il seno del di lui complemento. La *cotangente* di un arco è la tangente del di lui complemento. E si dirà *cosegante* di un arco la segante del complemento di esso.

16. *Def.* IX. Il *senoverso* di un arco è la differenza del raggio dal coseno di esso.

17. *Scol.* Così per illustrare le precedenti definizioni, ad un punto qualunque M (*fig.*3) del quadrante AMD si conduca il raggio CM, che si produca verso T. Ed abbassate dal detto punto le perpendicolari MP, ed MQ su i raggi AC, CD; si tirino agli estremi A, e D del quadrante le tangenti AT, DS, che incontrino in T, ed S il raggio CM.

Sarà MP il seno dell'arco MA; AT ne sarà la tangente; e CT la segante. Inoltre le rette MQ, DS, CS si diran coseno, cotangente, e cosegante del detto arco AM rispettivamente; poichè tali rette sono il seno, la tangente, e la segante dell' arco MD, ch' è il complemento di AM. E finalmente la PA sarà il senoverso del proposto arco AM. E queste linee trigonometriche, che i Geometri hanno adottate per la risoluzione de' triangoli, come più giù faremo vedere, hanno il seguente nesso fra loro.

Per la similitudine de' triangoli TAC, MPC sta AT ad AC, come MP a PC, cioè *la tangente dell' arco AM al raggio, come il seno de'lo stesso arco al suo coseno*. Ed essendo parimente CT a CA, come CM a CP; starà *la segante di un arco al raggio, come il raggio al coseno*. Finalmente per la somiglianza de' triangoli CAT, CDS, dee stare TA ad AC, come CD a DS, cioè *il raggio dee esser medio proporzionale tra la tangente, e la cotangente di un arco*.

Laonde indicando per $\phi$ un qualunque arco, si avrà, traducendo in linguaggio algebrico le tre

proporzioni quassù indicate, e poi prendendo i valori di tang.$\phi$, seg.$\phi$, ec., e dinotando per R il raggio

$$\text{tang.}\phi = \frac{\text{R.sen.}\phi}{\cos.\phi}\ ; \quad \text{seg}\ \phi = \frac{\text{R}^2}{\cos.\phi}\ .$$

$$\cot.\phi = \frac{\text{R}^2}{\text{tang.}\phi} = \frac{\text{R}\cos.\phi}{\text{R.sen.}\phi}\ ;$$

il che dinota che la *cotangente di un arco sia inversamente come la tangente del'o stesso.*

18. *Scol.* 2. Siccome la grandezza di un angolo non può eccedere i 180°; perciò i limiti delle linee trigonometriche sono stati da' Trigonometri fissati a 0°, e 180°. Or è egli chiaro, che cominciando a contar gli archi dall' estremo A del semicerchio ADB, e verso l' altro estremo B, un arco 0° debba avere per seno, per tangente, e per senoverso anche 0; ma che abbia poi per coseno, e per segante il raggio. E ciò può rilevarsi dalle addotte definizioni. A proporzione che il punto M, ch' è l' altro estremo dell' arco AM si discosta da A, le linee trigonometriche di quell' arco, cioè il seno MP, la tangente AT, la segante CT, ec. sono espresse in grandezze finite, e vanno successivamente crescendo fino alla metà del quadrante, cioè fino a 45°; mentre al contrario decrescono continuamente il coseno CP, la cotangente DS, e la cosegante CS. Segnando il punto M i 45°, le linee trigonometriche dell' arco AM, e quelle del suo complemento DM si fanno tra loro uguali: ed è anche chiaro che essendo CP=PM, sia pure CA =AT; cioè, che *la tangente, e la cotangente dell'*

*arco di 45° sieno quant' il ragg o del cerchio*. Oltrepassando il punto M i 45°, per approssimarsi a D, le linee trigonometriche dell'arco AM continuano a crescere, e decrescono quelle dell' arco DM, finchè divenendo l' arco AM di 90°, cioè cadendo il punto M in D, il seno diventa quant' il raggio, il coseno si fa zero, la tangente, e la segante infinite; poichè le AT, e CD divenendo parallele non possono mai più incontrarsi. E finalmente la cotangente diventando anche zero, la cosegante si fa uguale al raggio. E siccome il raggio è la massima delle normali al diametro AB; perciò il seno del quadrante dicesi *seno massimo*, ed anche *seno tutto*; poichè gli altri seni sono parti di esso. Cominciando il punto M il suo cammino nell' altro arco DB, cominciano a decrescere i seni, ed a crescere i coseni: e se per M si tiri MM' parallela ad AB, è chiaro che l'arco M'B supplemento dell'arco AM' sia uguale all'arco AM. Ma l'arco AM, e l'altro AM' hanno lo stesso seno ( 10 ) : dunque siccome al crescere dell' arco AM' deve decrescere il suo supplemento AM, e divenir, per conseguenza, più grande il complemento MD di questo; perciò ne segue che il seno dell'arco AM' decresca a proporzione, che il punto M' si accosta a B, e che vada al contrario crescendo il coseno.

Intanto essendo il coseno in generale quanto la differenza del raggio, e del senoverso di uno stesso arco, sarà cos.AM'=AC—AP', cioè = — CP', cioè = — CP, giacchè l' AP' è maggiore del raggio AC. Vale a dire che *un arco maggiore del qua-*

*drante ha lo stesso coseno del suo supplemento; ma preso negativamente*. Inoltre la tangente dell'arco AM′, cioè la AV, come rilevasi dall' ispezione della figura, essendo un quarto proporzionale in ordine al coseno dell' arco AM′, cioè a —CP, a PN, e CA, sarà espressa da $\frac{PN \times CA}{-CP}$, e quindi anche negativa. E così pure la cotangente DS′ di un tal arco, per essere uguale a $\frac{CP \times -QM'}{CQ}$, sarà pure negativa. E finalmente lo sarà anche la segante CV, ch'è quanto $\frac{CA^2}{-CP}$. Or paragonando l' espressione della tangente dell' arco AM′ con quella che fu esibita nel n. 17 per l' arco AM, si vedrà ch' esse sono identiche, e solamente diverse nel segno; dal che se ne rileva, che *un arco ed il suo supplemento hanno la stessa tangente; ma che questa dev' esser presa negativamente*. E lo stesso può dirsi per la segante.

Questa diversità di segni tra alcune linee trigonometriche dell' arco AM′, e quelle del suo supplemento AM, che noi abbiamo rilevata dalla natura stessa di tali linee, poteva anche dedursi dalla contrarietà della loro posizione. In fatti la CP′ coseno dell' arco AM′ è contrariamente posta a CP coseno dell' arco supplementale AM, e gli è uguale; e così pure la AV tangente dell' arco AM è in opposizione con AT tangente dell' arco supplementale AM, e gli è pure uguale; e finalmente CV segante dell' arco AM′ sta opposta a CT′ segante dell'arco BM′, cioè di AM supplemento di AM′.

Allorchè il punto M, avendo percorsa l' intera semicirconferenza ADB giugne in B, svanisce di nuovo il seno, come in A; il coseno, e la segante si fanno di nuovo uguali al raggio, ma negativamente preso; e la tangente divien zero: sicchè gli accidenti degli archi 0°, e 180°, come in generale di due archi supplementali, sono gli stessi; ma diversi nel segno, eccetto che per lo seno.

Si potrebbe anche continuar questa considerazione sulle linee trigonometriche, supponendo che il punto M continui a scorrere nell' altra semicirconferenza BEA, ed anche che dopo di aver egli percorsa una, due, o più circonferenze, continui tuttavia il suo moto, cioè si potrebbero valutare le linee trigonometriche di un arco maggiore del semicerchio, e di un arco composto da una, o più circonferenze di un cerchio stesso, e da qualunque arco di esso; ma queste considerazioni sono aliene da un trattato di Trigonometria Elementare; ne poi, come si è detto di sopra, possono interessare affatto l' oggetto di questa scienza. Noi dunque ci limiteremo a dare la seguente

TAVOLA DE' SEGNI DELLE PRINCIPALI LINEE TRIGONOMETRICHE IN DUE QUARTI DI CERCHIO.

| Arco | Seno | Coseno | Tang. |
|---|---|---|---|
| 0° | + 0 | + R | + 0 |
| Dopo 0° fino a 90° | + | + | + |
| 90° | + R | + 0 | + ∞ |
| Dopo 90° fino a 180° | + | — | — |
| 180° | + 0 | — R | — 0 |

19. Il seno di un arco, la di lui tangente, la segante, il coseno, la cotangente e la cosegante sono le linee trigonometriche adottate da' Geometri per la risoluzione del triangolo.

20. Le linee trigonometriche dell'arco AM, appartengonsi eziandio all' angolo ACM, di cui quello n' è misura (6).

21. Or le citate linee trigonometriche, non essendo in effetto delle grandezze geometriche, come par che indichino le quassù rapportate definizioni; ma bensì numeri, esse posson modificarsi nella seguente convenevol forma. Cioè, prendendo il raggio per l' unità delle linee trigonometriche.

Il seno dell' arco AM è il valor numerico, che vi tien la perpendicolare abbassata da un suo estremo sul raggio, che passi per l' altro; la tangente di un arco è il rapporto del seno al coseno di esso, cioè $\text{tang.}\phi = \frac{\text{sen.}\phi}{\text{cos.}\phi}$. E la segante è il rapporto del raggio al coseno, cioè $\text{seg.}\phi = \frac{1}{\text{cos.}\phi}$.

## PROPOSIZIONE III.

### TEOREMA.

22. *Le linee trigonometriche di due archi dello stesso numero di gradi e minuti, presi in cerchi diversi, sono proporzionali ai raggi de' cerchi.*

Intorno al centro C (*fig.* 1) si descrivano co' raggi

CB, C*b* i due quadranti circolari BRA, *bra*, e poi si tiri il raggio CR*r* : è manifesto che i due archi BR, *br* sottendendo lo stesso angolo in C, debbano essere dello stesso numero di gradi, e minuti ( 7. ). Ciò premesso si tirino tutte le linee trigonometriche di tali archi ; è chiaro che i triangoli CRN, C*rn* sono simili tra loro; e che perciò le RN, *rn*, e le CN, C*n* sono proporzionali ai raggi CB, *cb* : ed essendo CB : C*b* :: CN : C*n*; sarà permutando, dividendo, e di nuovo permutando BN : *bn* : : CB : C*b*. Essendo poi simili gli altri triangoli CBD, C*bd*, sta BD : BC :: *bd* : *b*C. Si è dunque dimostrato che le linee trigonometriche dell' arco BR, e quelle dell' altro *br* sono proporzionali a' raggi CB, C*b*. C.B.D.

23. *Cor.*1 Quindi quel numero ch'esprime le linee trigonometriche in un dato cerchio, per un arco determinato, e pel raggio diviso in un dato numero di parti, rappresenterà anche le linee trigonometriche di un arco dello stesso numero di gradi in un altro cerchio; purchè il raggio si supponga diviso similmente. E se i raggi di due cerchi sien rappresentati da numeri diversi; le linee trigonometriche corrispondenti a due archi dello stesso numero di gradi, presi in essi, dovranno esser dinotate da numeri proporzionali a quelli esprimenti i raggi.

24. *Cor.*2. Adunque non si cambierà nulla al valor delle linee trigonometriche di un arco in parti del raggio, se questo si supponga =1. Ed una tal supposizione è stata adottata da tutt' i Trigonometri, perchè la più semplice, e la più comoda.

25. *Def.* x. *Canone trigonometrico* è una tavola,

ove a ciascun arco minore del quadrante, ed espresso ne' suoi gradi, e minuti, ascrivonsi i valori numerici delle linee trigonometriche, che gli appartengono, presovi per unità il raggio. Un tal registro di linee trigonometriche, diecsi volgarmente *Tavola de' seni*.

26. *Cor.* Dividendosi ogni grado in 60° il quadrante, ch'è di 90°, sarà di 5400', Laonde saran pure 5400 quegli archi minori del quadrante, che vadan successivamente crescendo di un minuto.

Nella tavola de' seni il primo arco, cui appongonsi le sue linee trigonometriche, è di 1'. Il secondo è di 2'; e così successivamente per 5400 termini, l' ultimo de' quali è di 90°. E per evitare i fratti nel computo di ciascuna linea trigonometrica, il raggio, ch'erasi preso per l' unità, s' intende diviso in 10,000,000, o più parti decimali. E ciascuna di dette linee vedrassi espressa nel solo numeratore di un fratto decimale, cui si sottintende il denominatore 10000000.

27. *Scol.* Il canone trigonometrico riducesi a risolvere il seguente general problema. *Dato il rapporto numerico di un arco al quadrante, ritrovare il rapporto, che serbi al raggio, ciascuna linea trigonometrica di esso arco.*

La costruzione di questo canone, che può eseguirsi per più vie analitiche, e sintetiche, sarà quaggiù rapportata colla più agevol geometrica condotta. Esso suol distinguersi in *lineare*, o *naturale*; ed *artificiale*, o *logaritmico*. Il lineare è il già definito. E 'l logaritmico esibisce i logaritmi volgari delle linee trigonometriche, come nelle comuni tavole de' seni si osserva.

## DELLA COSTRUZIONE DEL CANONE LINEARE

---

### PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

28. *Se son date l'espressioni numeriche de' due lati di un triangolo rettangolo, sarà anche data quella del rimanente lato. E ciò sovente ottiensi per approssimazione.*

*Cas.* 1. Suppongansi dati i valori de' cateti RN, ed NC (*fig.*4) del triangolo RNC rettangolo in R; sarà la somma de' quadrati di questi due valori, o di questi due numeri, uguale al quadrato di quel numero, che n'esprimerebbe l'ipotenusa RC. Dunque la radice quadrata della somma dell'espressioni de' due cateti NR, NC sarà l'espressione dell'ipotenusa RC. Che se la retta RC sia incommensurabile alle RN, NC, come il più delle volte avviene, l'anzidetta radice non potrà aversi esattamente, ma per approssimazione; e tal ne sarà il valore dell'ipotenusa RC.

*Cas.* 2. Se diasi di espressione l'ipotenusa CR, e 'l cateto NR, l'altro cateto NC sarà espresso dalla radice della differenza del quadrato dell'ipotenusa CR, e di quello del cateto RN. Lo che si dimostra come nel precedente caso. C. B. D.

## PROPOSIZIONE V.

### TEOREMA.

29. *Il coseno d'un qualunque arco è la radice della differenza del quadrato del raggio, e del quadrato del seno di esso arco.*

L'arco (*fig* 4) RB tien per seno il valor numerico della perpendicolare RN calata dal suo estremo R sul raggio CB, che passa per l' altro estremo B. E lo stesso arco ha per coseno il valore numerico della RM, o della sua uguale NC. Di più il raggio trigonometrico RC si è posto uguale ad 1. Dunque dalle date espressioni dell' ipotenusa RC, e del cateto RN del triangolo rettangolo RNC, che sono il raggio, e 'l seno dell'arco RB, si avrà, per lo teorema precedente, il valore dell'altro cateto CN, cioè del coseno dell' arco RB, ed ei sarà la radice della differenza de' quadrati del raggio, e del seno di esso arco. C. B. D.

30. *Cor.* 1. Suppongasi esser l' arco RB di 30°: il suo complemento RA ne avrà 60°. Ed essendo uguale al raggio la corda RA di questo arco, ch' è la sesta parte della periferia (c.15.IV.); i due triangoli RMC, RMA, che han le condizioni della 26. El. I., avran pure uguali i lati CM, ed MA. Onde dovrà esser la retta CM, o la sua uguale RN metà del raggio CA.

31. *Cor.* 2. Dunque il seno dell' arco di 30° è la metà del raggio. Sicchè ponendo uguale all' u-

nità cotesto raggio, sarà sen. $30^{o} = \frac{1}{2}$. E 'l coseno di $30^{o}$, ch' è uguale a $\sqrt{(1-\frac{1}{4})}$, sarà $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

## PROPOSIZIONE VI.

32. *Il seno della metà di un arco è la metà della radice della somma de' quadrati del seno, e del senoverso di esso arco.*

Sia REB un arco (*fig* 4), RN il suo seno, ed RB la sua sottesa. Dal centro C si abbassi la CE perpendicolare alla RB. Ella dovrà bisegare sì l' arco REB, che la sua corda. Onde la RD dovrà esser seno dell' arco RE metà di REB; ma la RB è la radice de' due quadrati di RN, e di NB presi insieme. Dunque la RD, ch' è il seno dell' arco RE, sarà la metà della radice de' due quadrati di RN, e di NB, l' uno fatto dal seno dell' intero arco, e l'altro dal di lui senoverso. C.B.D.

## PROPOSIZIONE VII.

### TEOREMA.

33. *Il seno della somma di due archi è quanto la somma de' due prodotti, che si hanno moltiplicando il seno dell' uno per lo coseno dell' altro; posto però il raggio* $=1$.

*E il seno della differenza di essi archi è quanto la differenza positiva di que' prodotti stessi.*

Sieno BE, ER gli archi proposti (*fig* 5), i cui se-

*

ni sieno EH, RD, e CH, CD i coseni: sia poi RS il seno della loro somma, cioè dell'arco REB, PQ il seno della differenza di essi, cioè dell' arco PB.

Si compia la figura come si vede. Ed essendo simili i triangoli CEH, CDG sta CE:EH :: CD:DG cioè ( chiamando $\phi$, e $\theta$ gli archi BE, ER, e dinotando per 1 il raggio CE, come suol farsi ) 1 : sen $\phi$ :: cos.$\theta$ : DG = sen $\phi$.cos.$\theta$. Similmente per gli altri triangoli simili RDF, CEH sta CE : CH :: RD : RF, cioè 1 : cos.$\phi$ :: sen.$\theta$ : RF. E sarà quindi RF = sen.$\theta$.cos.$\phi$. Laonde la RN, cioè sen.($\phi+\theta$), essendo = NF+FR, o sia a GD+FR, sarà quanto sen $\phi$.cos.$\theta$+sen.$\theta$.cos $\phi$.

Or per essere RD = DP è anche RF = FS: che perciò PQ, cioè sen.($\phi-\theta$), ch' è quanto DG—FR, sarà uguale a sen.$\phi$.cos.$\theta$—sen.$\theta$.cos.$\phi$. Cioè il seno della somma di due archi ec. C.B.D.

34. *Cor.* 1. Se i due archi RE, e BE sieno uguali, e con ciò uguali i loro seni, ed i loro coseni rispettivamente; la RN seno della somma di essi archi sarà doppia di una di quelle due quarte proporzionali. Ed in tal caso si rileverà esserne *Il raggio al coseno doppio di un arco, così il seno di esso arco al seno del suo doppio.*

35. *Cor.* 2. E se l' arco EB sia di 60°, il suo coseno CH sarà = $\frac{1}{2}$EC (31); e quindi essendo CE : CH :: RD : RF, sarà anche RD doppia di RF, e perciò uguale ad RS. Laonde la RN, ch' è seno della somma degli archi BE, ER, essendo uguale ad NS+SR, sarà quanto PQ+RD. Ma PQ è uguale al seno di BE—EP, o sia di BE—ER. Adunque

*Il seno di un arco maggiore di 60° è quanto la somma di due seni, uno dell' eccesso dell' arco proposto su quello di 60°, e l' altro della differenza tra l' arco di 60° e l' eccesso poc' anzi detto.*

Cioè $\text{sen}.61^\circ = \text{sen}\,59^\circ + \text{sen}.1^\circ$

$\text{sen}.62^\circ = \text{sen}.58^\circ + \text{sen}.2^\circ$

cc.

36. *Scol.* Gli stessi triangoli simili ECH, DCG danno anche la seguente analogia CE : CH :: CD : CG, cioè $1 : \cos.\phi :: \cos.\theta : CG = \cos.\phi.\cos.\theta$: Ed è poi per gli altri triangoli anche simili CEH, RDF, CE : EH :: RD : DF, cioè $1 : \text{sen}.\phi :: \text{sen}.\theta : DF = \text{sen}.\phi.\ \text{sen}.\theta$. Laonde CN, ch' è uguale a $CG - GN = CG - DF$, sarà quanto $\cos.\phi.\ \cos.\theta - \text{sen}\,\phi.\ \text{sen}.\theta$; e CQ, ch' è quanto $CG + GQ$, cioè $CG + GN$, per essere $GQ = GN$, siccome è $PD = DR$, sarà uguale a $\cos.\phi.\cos.\theta + \text{sen}.\phi.\text{sen}.\theta$. Ma CN è lo stesso che $\cos.(\phi+\theta)$, e CQ è quanto $\cos.(\phi-\theta)$. Laonde sarà

$$\cos.(\phi+\theta) = \cos.\phi.\cos.\theta - \text{sen}.\theta.\text{sen}.\phi$$

e $$\cos.(\phi-\theta) = \cos\,\phi.\cos.\theta + \text{sen}.\theta.\text{sen}.\phi$$

Cioè *il coseno della somma di due archi è quanto il prodotto de' coseni di essi archi, meno l' altro de' loro seni: ed il coseno della differenza di due archi pareggia la somma de' prodotti poc' anzi indicati.*

Inoltre essendo

$$\text{sen}.(\phi+\theta) = \text{sen}\,\phi\,\cos.\theta + \text{sen}.\theta.\cos\,\phi$$

e $$\cos.(\phi+\theta) = \cos.\phi.\cos.\theta - \text{sen}.\theta.\text{sen}.\phi$$

sarà $$\frac{\text{sen}.(\phi+\theta)}{\cos.(\phi+\theta)} = \frac{\text{sen}.\phi.\cos.\theta + \text{sen}.\theta.\cos.\phi}{\cos.\phi.\cos.\theta - \text{sen}.\theta.\text{sen}.\phi}$$

e dividendo il numeratore, e denominatore di

quest' ultimo fratto per $\cos\phi.\cos.\theta$, si avrà

$$\frac{\text{sen.}(\phi+\theta)}{\cos.(\phi+\theta)} = \frac{\frac{\text{sen}\,\phi}{\cos\,\phi}+\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\,\theta}}{1-\frac{\text{sen}\,\phi}{\cos.\phi}\times\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\,\theta}}$$

e quindi sostituendo invece del seno diviso per lo coseno, la tangente dell'arco corrispondente (17), si avrà

$$\text{tang.}(\phi+\theta) = \frac{\text{tang.}\phi+\text{tang.}\theta}{1-\text{tang.}\phi\times\text{tang.}\theta}$$

E similmente si sarebbe potuto rilevare esser

$$\text{tang.}(\phi-\theta) = \frac{\text{tang}\,\phi-\text{tang.}\theta}{1+\text{tang.}\phi\times\text{tang.}\theta}$$

Cioè *la tangente della somma di due archi è quanto la somma delle tangenti di essi, divisa pel raggio minorato del prodotto delle stesse tangenti*. *E la tangente della loro differenza è quanto la differenza di quelle tangenti, divisa pel raggio accresciuto del prodotto di esse*.

E queste cose sono state quì rapportate, a sol' oggetto di render completa la teoria stabilita nella Proposizione, della quale abbisognavamo per la costruzione del Canone.

## PROPOSIZIONE VIII.

### TEOREMA.

37. *Se i tre archi BP, BE, BR sieno in proporzione aritmetica, sarà il raggio al doppio coseno dell'arco medio BE, come il seno della diff renza di questi archi alla differenza de' seni degli archi estremi BP, BR,*

Quì sopra si è dimostrato essere CE a CH, come DR ad RF (33). Dunque duplicando i conseguenti avremo CE alla dupla CH, come RD ad RS; e queste rette corrispondono alle linee trigonometriche disegnate nell' enunciazione. Dunque ec. C. B. D.

## PROPOSIZIONE IX.

### TEOREMA.

39. *Se gli archi AB, AC, AD, AE, ec. che abbiano un comune estremo A siano nella ragione de' numeri 1,2,3,4,ec.; la corda di ciascun arco starà alla somma delle corde di quegli archi in mezzo a' quali quello si ritrova, per esempio AC ad AB+AD, nella costante ragione del raggio al doppio coseno della metà della differenza degli archi.*

Si congiungan le corde BC, e CD (*fig* 6); poi si faccia l' angolo ACH uguale all' altro ABC: ed indi l' altra corda AD si prolunghi, fintanto che incontri in H la CH. Saranno equiangoli i due triangoli ABC, ACH; come quelli, che hanno uguali sì gli angoli ABC, ACH, che gli altri BAC, CAH, perchè insistenti sugli archi uguali BC, CD. Onde sarà AB a BC, come AC a CH: e quindi AC uguale a CH, come è AB uguale a BC. Inoltre il triangolo BAC è uguale e simile all' altro CDH, per aver essi le condizioni della 26 El. I., cioè l' angolo ABC uguale all' altro CDH;

poichè ciascuno di essi unito all' angolo CDA fa due retti (13. 1, e 22. III.): e l' angolo BAC si è mostrato uguale a CHD, e'l lato AC all'altro CH. Dunque sarà AB uguale a DH. Ed essendo, per la similitudine de' triangoli ABC, ACH, AB ad AC, come AC ad AH; sarà AB ad AC, come AC ad AD+AB. Ma la prima di queste due ragioni (34) è quanto quella del raggio al doppio coseno della metà dell' arco AB: dunque a questa ragione dovrà essere uguale quella della corda media AC alla somma delle estreme AD, AB. E se facciasi l' angolo ADK uguale ad ACH, o ad ABC, si dimostrerà, come qui sopra, essere l' angolo DEK uguale ad ACD, ed il triangolo ADK simile ad ACH, o ad ABC. Laonde si conchiuderà esser pure AD: AC+AE, come il raggio al doppio coseno della metà di AB. C.B D.

39. *Cor.* 1. Pongasi il raggio trigonometrico uguale all' unità; e si chiami $\phi$ la metà dell' arco AB; sarà $1 : 2\cos\phi :: \frac{1}{2}AC : \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AD$, prendendo la metà de' termini della seconda ragione. E così più appresso dovrà essere $1 : 2\cos\phi :: \frac{1}{2}AD : \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AE$.

40. *Cor.* 2. Ma $\frac{1}{2}AB$ è uguale al seno dell' arco $\frac{1}{2}AB$ (p.6.). E così pure $\frac{1}{2}AC$ è seno dell'arco $\frac{1}{2}AC$. Dunque sarà

$1 : 2\cos.\phi :: \text{sen.}\frac{1}{2}AC : \text{sen.}\frac{1}{2}AB + \text{sen.}\frac{1}{2}AD$

ed $1 : 2\cos.\phi :: \text{sen.}\frac{1}{2}AD : \text{sen.}\frac{1}{2}AC + \text{sen.}\frac{1}{2}AE.$

## PROPOSIZIONE X.

### PROBLEMA.

41. *Ritrovare il seno dell' arco di 1',*

I poligoni regolari di 16384 lati iscritto, e circoscritto ad un cerchio del raggio 1, con un approssimazione portata fino a 15 cifre decimali, sono rispettivamente espressi da 3,141592576586860, e 3,141592692091258, come può rilevarsi nella maniera prescritta nelle Propp. 1 e 2 della Misura del cerchio. Ciò posto, se si determini la perpendicolare, che dal centro del cerchio cade su di un lato del poligono iscritto, facendo come il poligono circoscritto all' iscritto, così il quadrato del raggio al quadrato di questa perpendicolare, ed estraendo da un tal quarto proporzionale la radice quadrata, si avrà in tal modo la doppia altezza di quel rettangolo, che pareggia questo poligono, e la cui base è il perimetro di esso: che perciò un tal perimetro potrà determinarsi, ed esso sarà espresso da 6,283185278837425. In simil guisa si determinerà il perimetro del poligono circoscritto, che è 6,283185384418256: laonde dividendo ciascun di questi due numeri per 16384, numero de' lati di ciascuno di tali poligoni, i quoti 0,0003834951, e 0,0003834952, i quali non differisconsi, che nella 10ma cifra decimale solamente, rappresenteranno due lati di essi. Adunque l' arco di cerchio ch' è sotteso da un lato del

poligono di 16384 lati differiscesi dalla sua corda per meno che $\frac{1}{10000000000}$ del raggio; e per conseguenza un tal arco, e la sua corda, con un'approssimazione assai più che sufficiente per gli ordinarj usi trigonometrici, potranno prendersi per uguali. Ma quest'arco è precisamente di 1′19″0‴5⁗ 37′′′′′30′′′′′′, come può vedersi dividendo la circonferenza, e quindi i 360° per metà, tante volte, quante se ne richiede per pervenire a 16384 parti, cioè 14volte (*p.1 mis. del cer.*). Dunque con più ragione potrà supporsi che si confonda colla corda contermine l'arco di 1′: e perciò potrà stabilirsi la seguente proporzione, l'arco di 1′19″0‴5⁗37′′′′′30′′′′′′ a quello di 1′, come la corda di quello alla corda di questo, cioè come 0,0003834951 ad $x$, che sarà la corda dell' arco di 1′, della quale presane la metà, si avrà il seno dell' arco di mezzo minuto; e da questo se ne dedurrà poi quello di 1′ (34). C.B.F.

42.*Cor.* Nel prendere il valore dell'arco di 1′ da quello di mezzo minuto primo, cioè 30″, servendosi dell' espressione sen. $1' = 2\text{sen}.30''.\cos.30''$, (34) è facile il vedere, che cos. 30″ sia presso che uguale al raggio, cioè ad 1, e che perciò sen.$1' = 2$ sen.$30''$. Vale a dire, che si può a dirittura prendere per seno di 1′ la corda di quest' arco.

## PROPOSIZIONE XI.

### TEOREMA.

43. *Esporre co' principj precedenti l' effettiva formazione del canone trigonometrico.*

Per la prop. prec. può ritrovarsi il valore numerico di sen.1′. E si saprà, per lo Corol. 1. Prop. 9, il seno del suo doppio, cioè si saprà benanche sen.2′.

Inoltre per la Prop. 5. si renderà noto cos. 1′. E 'l raggio trigonometrico si ponga $=1$; sarà per lo Cor. 2. della Prop. 9.

$$1 : 2\cos.1' :: \text{sen}.2' : \text{sen}.1' + \text{sen}.3'.$$

E quindi avrassi

$$\text{sen}.3' = 2\cos.1'.\text{sen}.2' - \text{sen}.1'.$$

E da simil principio discendendo avremo i seguenti seni, con impiegarvi la sola moltiplica di aritmetica, e la sottrazione, cioè:

$$\text{sen}.4' = 2\cos.1'.\text{sen}.3' - \text{sen}.2'$$
$$\text{sen}.5' = 2\cos.1'.\text{sen}.4' - \text{sen}.2';$$
$$\text{sen}.6' = 2\cos.1'.\text{sen}.5' - \text{sen}.4'.$$

Questa operazione, che potrebbe estendersi insino all' arco di 90°, cioè effettuandola per 5400 archi, che vadan successivamente crescendo di 1′, si arresta all' arco di 60°. E poi per lo Corol. 2. Prop. 7., e con più agevol calcolo si rinverranno

$$\text{sen}. (60^\circ + 1') = \text{sen}.(59^\circ + 59') + \text{sen}.1'.$$
$$\text{sen}. (60^\circ + 2') = \text{sen}.(59^\circ + 58') + \text{sen}.2'.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\text{sen}.61^\circ = \text{sen}.59^\circ + \text{sen}.1^\circ$$
$$\text{sen}.62^\circ = \text{sen}.58^\circ + \text{sen}.2^\circ$$
$$\text{sen}.63^\circ = \text{sen}.57^\circ + \text{sen}.3^\circ$$

ec.

Ritrovati i seni degli archi di un quadrante, i quali si sogliono distribuire in due colonne verticali, una contenente i seni fino a 45°; e l' altra,

che comprende i coseni di questi archi, cioè i seni da $89^{\circ}+59'$ a $45^{\circ}$; se ne potran calcolare le loro tangenti, e seganti, colle analogie dello Scolio n°. 17. Ed ecco esposto il modo da costruire con sole operazioni della volgare aritmetica il canone lineare.

44. *Scol.* Siccome nell' uso ordinario di questo canone per la risoluzione de' triangoli, imbarazzerebbero non poco le lunghissime moltipliche, e divisioni, che convien fare; perciò i trigonometri han pensato di aggiugnere al canone lineare i logaritmi corrispondenti a' numeri in esso contenuti; vale a dire hanno stabilita un' altra specie di canone, che dicesi logaritmico, e ch' è quello di cui si fa uso. Ed in alcune Tavole si trova a dirittura rapportato il solo canone logaritmico, trascurandosi il lineare come inutile. Intanto sarebbe assolutamente superfluo il dir quì qualche cosa circa il canone logaritmico; poichè questo trovasi a sufficienza spiegato nel principio delle ordinarie *Tavole de' seni*, ed è facilissimo l' intenderlo a chi non ignora l' ordinaria teoria dei logaritmi volgari.

# PARTE II.

## PRINCIPJ PER LA RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI.

---

### PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

45. *In ogni triangolo rettangolo l' ipotenusa sta a ciascun lato, come il raggio trigonometrico al seno dell' angolo opposto ad un tal lato.*

Imperocchè se descrivasi col centro A (*fig.* 7) intervallo AB l' arco circolare BD, è chiaro che il cateto BC sia seno dell' arco BD, o sia dell' angolo BAC: e quindi dovrà stare

BA : BC :: 1 : sen.CBA

E similmente si dimostrerebbe che sta

BA : AC :: 1 : sen.BCA.

46. *Cor.* Adunque starà pure

BC : CA :: sen.BAC : sen.CBA.

### PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

47. *In ogni triangolo rettangolo un lato sta all' altro, come il raggio trigonometrico alla tangente dell' angolo ad esso opposto.*

*Ed un lato sta all' ipotenusa, come il raggio trigonometrico alla segante dell' angolo adjacente.*

Poichè se descrivasi col centro A intervallo AC l' arco circolare CE, è chiaro che CB dinoti la tangente dell' arco CE, e quindi dell' angolo in A, e che AB rappresenti la segante di quell' arco, o di quest' angolo. Laonde dovrà stare

AC : CB :: 1 : tang.A,

AC : AB :: 1 : seg.A.

e queste sono le due analogie proposte nel presente Teor. C.B.D.

## PROPOSIZIONE XIV.

### TEOREMA.

48. *In ogni triangolo i lati sono come i seni degli angoli ad essi opposti.*

Dal vertice A (*fig*.8) di uno degli angoli del triangolo ABC si abbassi sul lato opposto la perpendicolare AD, si avrà nel triangolo rettangolo BAD, BA:AD :: 1 : sen.B (45), e quindi AD = BA $\times$ sen.B. E similmente si ricaverà dal triangolo CAD esser AD = CA $\times$ sen. C. Laonde dovrà risultarne BA $\times$ sen.B = CA $\times$ sen.C : e quindi considerando i seni come linee rette si vedrà esser (14. VI.)

CA : BA :: sen.B : sen.C

E nel modo stesso abbassando da B la perpendicolare sul lato AC si dimostrerà che sia

BA : BC :: sen.C : sen.A.

Quindi, per eqnalità, se ne conchiuderà anche
CA : BC :: sen.B : sen.A

## PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

49. *In ogni triangolo il massimo lato sta alla somma degli altri due, come la differenza di questi alla differenza de' segmenti del massimo lato.*

Col centro A (*fig.*9) intervallo il minimo lato AB si descriva il cerchio B*b*FO, che s ghi gli altri due lati BC, CA in *b*, ed F: e poi la CA si protragga sino al cerchio in O. Sarà CO uguale a CA+BA, e CF uguale a CA—BA. Ed essendo C*b* uguale a CD—D*b*, sarà uguale a CD—DA.

Ciò premesso, per la natura del cerchio, il rettangolo OCF è uguale all'altro BC*b*. Dunque sarà CB : CO :: CF : C*b*, cioè CB : CA+AB :: CA—AB : CD—DB. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

50. *In ogni triangolo la somma de' lati è alla loro differenza, come la tangente della semisomma degli angoli alla base alla tangente della semidifferenza di essi.*

Si circoscriva al triangolo ACB (*fig.*10) il cerchio,

e dal centro O di questo si tirino i raggi OG, OF perpendicolari ai lati AC, AB, e congiunto l'altro raggio OA, gli si abbassino dai punti G, F le perpendicolari GL, FH, che sono i seni degli angoli GOA, AOF, cioè B, e C; finalmente si unisca la GF, e gli si abbassi dal centro O la perpendicolare OM. E poichè l'angolo GOA è uguale a CBA, e l'angolo AOF a BCA; quindi sarà l'angolo GOF quanto la somma degli angoli B, e C, e perciò l'angolo GOM, ch'è metà dell'angolo GOF sarà la semisomma degli angoli B, e C. Di più essendo l'angolo GOK = GOM + MOK sarà esso uguale ad FOM + MOK, cioè = FOK + 2KOM; e perciò GOK — KOF = 2KOM: quindi KOM sarà la semidifferenza degli angoli GOK, KOF ossia B, e C.

Or essendo simili i triangoli GKL, FKH sta GK : KF :: GL : FH, cioè :: AC : AB (48), e componendo sarà GF : FK :: CA+AB : AB, e poi dividendo, ed invertendo si avrà FK : GK — KF :: AB : AC — AB. Laonde, per equalità, dovrà stare GF : GK—KF :: CA+AB : CA — AB. Ma, presa MN = MK, GN sarà uguale a KF, e GK — KF è quanto GK — GN cioè NK; adunque sarà CA+AB : CA — AB :: GF : NK, o pure :: GM : MK. Quindi, siccome preso OM per raggio, le MG, MK rappresentano le tangenti degli angoli MOG, MOK, cioè $\frac{1}{2}$(B+C) ed $\frac{1}{2}$(B—C) (47); perciò si avrà

$$CA+AB : CA—AB :: \text{tang.} \frac{B+C}{2} : \text{tang.} \frac{B—C}{2}.$$

Cioè la somma de' lati è alla lor differenza ec. C.B.D.

## RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI.

51. In ogni triangolo, dati due angoli è anche dato il terzo, ch' è il supplemento a due retti della somma de' due dati; e perciò nel triangolo rettangolo, s' è dato uno degli angoli acuti, sarà dato anche l' altro. Di più in questo triangolo, se sono dati due lati, si conoscerà il terzo per mezzo della Prop. 4., e senza operazioni trigonometriche

### PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA.

52. *In un triangolo rettangolo dato uno de' lati, ed un' altra delle sue parti ad arbitrio; determinare le rimanenti parti.*

CASO I.

Sien dati i cateti AC, CB (*fig.* 7). Per determinare l' angolo in A, si faccia

AC : CB :: R : tang. A (47)

Si farà nota la tangente dell' angolo A; e quindi un tal angolo apparirà dalle tavole.

CASO II.

Che se diasi il cateto AC, e l' ipotenusa AB. Si troverà l' angolo in B facendo

AB : AC :: R : sen. B (45)

donde si farà anche noto quello in A; e si sarebbe trovato direttamente questo per mezzo della seguente analogia

AC : AB :: R : seg. A (47)

CASO III.

E dandosi il cateto AC, ed uno degli angoli acuti, e perciò anche l' altro. Per determinare l' altro cateto BC, bisognerà fare

R : tang.A :: AC : CB (47)

o pure sen.B : sen.A :: AC : CB (45)

Ma la prima analogia è da preferirsi alla seconda; poichè il primo termine R di quella è = 1. E volendo l' ipotenusa AB, converrebbe fare

R : seg.A :: AC : AB (47)

o pure sen.B : R :: AC : AB (45)

CASO IV.

Finalmente dandosi l' ipotenusa AB, ed uno degli angoli alla base, e quindi l' altro: se si voglia il cateto AC, si dovrà fare

R : sen. B :: AB : AC (45)

E poichè non vi resta altra combinazione a fare; perciò si sarà completamente risoluto il Problema proposto. C. B. F.

## PROPOSIZIONE XV.

### PROBLEMA.

53. *In un triangolo obbliquangolo, date tre delle sue parti, compresovi sempre uno de' lati; determinare le rimanenti parti.*

CASO I.

Sieno dati in primo luogo gli angoli in A, B (*fig.*8), e quindi l' altro in C, ed il lato AB; e si cerchino gli altri due lati BC, AC.

Si faccia sen. C : sen. A : : BA : BC (48)
e similmente sen. C : sen. B : : BA : AC (48)
si avranno in tal modo i lati BC, AC.

CASO II.

Che se diansi i lati AB, AC e l'angolo C opposto ad uno di essi lati AB; si troverà l'angolo in B opposto all'altro lato AC facendo

AB : AC : : sen. C : sen. B (48)

Quindi sen. B si farà noto; e dalle tavole apparirà l'angolo B, per conseguenza quello in A, e finalmente il terzo lato BC (Cas. I.)

È però da avvertirsi per questo secondo Caso, che se mai l'angolo dato è opposto al lato maggiore, allora l'angolo opposto all'altro lato dato dovrà essere necessariamente acuto; poichè dev' essere minore del dato (14.V.), e quindi acuto, quando anche quello sia ottuso; mentre un triangolo non può avere due angoli ottusi, o uno ottuso, e l'altro retto. Che se poi l'angolo dato è opposto al lato minore, com'è nella fig. 9, in cui l'angolo dato C sta opposto al lato BA minore di AC; allora la specie dell'angolo opposto al lato AC sarà *dubbia*, cioè potrà esso essere acuto, o ottuso. In fatti descrivendosi col centro A intervallo il lato minore AB il cerchio BOF; questo dovrà segare il lato BC in *b*, e congiunta la A*b* avrà gli stessi dati sì il triangolo ABC, che l'altro A*b*C; per conseguenza si sarà in dubbio se si risolva l'uno, o l'altro, a meno che le circostanze della quistione non tolgano l'incertezza.

CASO III.

E se sien dati i due lati BA, AC (*fig.* 10) e l'angolo in A da essi compreso: si troverà ciascuno degli angoli alla base facendo

$$AC+AB : CA-AB :: \text{tang.} \frac{B+C}{2} : \text{tang.} \frac{B-C}{2} \quad (50)$$

Si avrà in tal modo la tangente dell'angolo, ch'è semidifferenza degli angoli B, C, e quindi un tal angolo si farà noto dalle tavole: e perciò se esso si aggiunga alla metà della somma degli angoli B, C si avrà l'angolo maggiore B, se se ne tolga si avrà il minore C (*).

CASO IV.

Finalmente se sien dati i tre lati BC, CA, AB (*fig.* 9), e si cerchino gli angoli.

Si abbassi sul maggior lato BC la perpendicolare AD dal vertice dell'angolo A, che gli è opposto, e poi si faccia

$$BC : CA+AB :: CA-AB : CD-DB \quad (49).$$

Ed avuta questa differenza de' segmenti della base BC si aggiunga essa alla metà di tal base, a fine di averne il maggior segmento CD, e poi se ne tolga per ottenere il minor di essi BD *: è chiaro che dalla risoluzione de' due triangoli rettan-

---

(*) *Che essendo $M$ la somma di due quantità, ed $N$ la differenza loro, $\frac{1}{2}(M+N)$ dinoti la maggiore, ed $\frac{1}{2}(M-N)$ la minore, si può intuitivamente rilevare dal vedere, che in effetti $\frac{1}{2}(M+N) + \frac{1}{2}(M-N) = M$, ed al contrario che $\frac{1}{2}(M+N) - \frac{1}{2}(M-N) = N$.*

goli ABD, ACD, i quali hanno le condizioni del Cas. 2. del Probl. prec., si faranno noti gli angoli B, C, e per conseguenza il terzo A.

Ed ecco risoluti tutt' i casi de' triangoli obbliquangoli. C. B. F.

54. I ristretti limiti di un Trattato elementare di Trigonometria non permettendomi un' estesa applicazione de' principj stabiliti, mi limiterò a darne quì un saggio nel seguente Problema, il qual comprende più di uno de' casi di risoluzione poc' anzi esposti. Del resto chiunque volesse spaziarsi nell' applicazione della Trigonometria Rettilinea alla Geometria, potrà dirigersi al dotto Trattato di Trigonometria del Sig. Cagnoli, in dove verso la fine del Cap. XI. troverà molti di questi esempj ingegnosamente condotti; e nel Cap. XIII. potrà anche estesamente istruirsi nelle pratiche di tal Trigonometria sul terreno.

## PROPOSIZIONE XV.

### PROBLEMA.

55. *Dati i tre angoli piani che comprendono un angolo solido; determinare l' inclinazione di que' piani ne' quali esistono due di essi angoli.*

L'angolo solido proposto sia quello in A (*fig.* 11), e preso in un suo lato AD il punto D ad arbitrio, si elevino ad un tal lato, e ne' piani DAB, DAC rispettivamente, le perpendicolari DB, DC: è chiaro che l' angolo BAC dinoterà l' inclinazione

del piano DAB all'altro DAC ( d. 6. XI. ) .
Si congiunga la BC, e poi si risolva ciascuno de' triangoli rettangoli ADB, ADC ne' quali è noto il cateto AD, che gli è comune, ed inoltre nel primo di essi è noto l' angolo DAB, è nell' altro l' angolo DAC (Cas.3. p.14) ; si faranno note nel primo le BD, BA, e nel secondo le CD, CA. Ciò posto nel triangolo CAB vi saranno noti i due lati CA, AB, e l' angolo in A da essi compreso ; che perciò si farà nota la CB (Cas.3. p.15). E finalmente nel triangolo CDB essendovi noti i tre lati, si determinerà l' angolo CDB (Cas.4. p.15). C.B.D.

# FINE

DELLA TRIGONOMETRIA RETTILINEA.

# ELEMENTI
## DI TRIGONOMETRIA SFERICA

## DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

### PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

56. *La comune sezione di un piano con una sfera è un cerchio.*

La sfera BAE (*fig.*12) sia segata dal piano ABC, sul quale dal centro O della sfera si abbassi la perpendicolare OD; e presi ovunque nel perimetro della sezione ABC i punti B, C, si uniscano le OB, OC, DB, DC. E poichè la OD è perpendicolare al piano ABC, gli angoli in D saranno retti; e perciò i due triangoli rettangoli ODB, ODC avendo uguali le loro ipotenuse OC, OB, ed il cateto OD comune, dovranno avere anche uguali gli altri cateti DB, DC. Laonde tutti i punti del perimetro della sezione ABC sono equidistanti dal punto D, ch'è dentro di tal sezione; quindi essa sarà un cerchio, ed il suo centro sarà D. C. B. D.

57. *Cor.*1. Il centro di ogni cerchio, che rappresenta una sezione fatta in una sfera è dunque quel

punto in dove il piano di una tal sezione è incontrato dalla perpendicolare abbassatali dal centro della sfera : e di più il quadrato del raggio di questo cerchio è quanto la differenza de' quadrati del raggio della sfera , e della distanza del centro di essa da quello della sfera .

58. *Cor.*2. Ciò posto è manifesto, che a proporzione che si minorerà la distanza del centro di un di que' cerchi da quello della sfera , maggiore si farà il cerchio ; e che questo diverrà il massimo , allorchè il piano che ha segata la sfera passa per lo centro di questa : e che perciò

59. *Def.* I. Tutti que' cerchi che hanno per centro quello della sfera si dicono *massimi* , e si chiaman poi cerchi *minori* tutti gli altri .

60. *Cor.* I. Per due punti della superficie di una sfera non vi passa che un solo cerchio massimo ; poichè il piano di questo dovendo passare anche per lo centro della sfera , viene a passare per tre punti dati, e perciò è determinato (2.XI).

61. *Cor.* 2. Di più due cerchi massimi intersegandosi in una retta , che passa per lo centro comune di essi , e ch'è perciò un diametro , debbono restar divisi scambievolmente per metà , e le loro circonferenze si verranno ad intersegare alla distanza di 180° .

62. *Def.* II. Quel diametro della sfera , ch' è perpendicolare al piano di un circolo massimo, si dice suo *asse*: e gli estremi di un tal diametro ne sono i *poli* .

Questi punti si dicono anche *poli di tutti gli altri cerchi* paralleli a quel circolo massimo .

63. *Cor.* È chiaro dall' addotta definizione, che due cerchi massimi non possono avere un medesimo polo: poichè altrimenti la congiungente un tal polo col loro centro comune, sarebbe perpendicolare a due piani diversi. Di più, che se per i poli di un circolo massimo ne passi un altro; gli archi di questo frapposti tra un de' poli, e la circonferenza del primo cerchio sieno di 90°.

## PROPOSIZIONE II.

### TEOREMA.

64. *Il raggio di una sfera sta a quello di un suo cerchio minore, come il raggio trigonometrico al seno dell' arco di cerchio massimo, ch' è tra la circonferenza del cerchio minore, ed il polo di esso.*

Sia ABC un cerchio minore, il cui polo sia E; sarà il suo raggio DB seno dell' arco BE (11); ma nel triangolo rettangolo BDO sta l' ipotenusa OB, cioè il raggio della sfera, al cateto BD, come il raggio trigonometrico al seno dell' angolo BOD, o dell' arco BE (45). Dunque ec. C.B.D.

65. *Cor.* Essendo i raggi di due cerchi come le loro circonferenze (se.p.3 Arch.), e quindi come le 360me parti di queste (15.V.), cioè come i loro gradi; ne segue, che *il grado di un cerchio massimo sta a quello di un cerchio minore, come il raggio trigonometrico al seno dell' arco di cerchio massimo, ch' è tra il cerchio minore, ed il suo polo.*

66. *Def.* III. L' *angolo* sferico è la scambievole

inclinazione di due archi di due cerchi massimi sulla superficie di una sfera.

67. *Def.* IV. *Triangolo sferico* è poi quella porzione di superficie sferica, ch'è terminata da tre archi di tre cerchi massimi.

## PROPOSIZIONE III.

### TEOREMA.

68. *Se in due archi disuguali si adatti una stessa corda; l'arco più piccolo che questa troncherà dal maggior cerchio, sarà minore dell' arco più piccolo, che la stessa taglierà dal cerchio minore.*

Sieno ABC, BEA (*fig* 13) i due cerchi, ed AB la loro corda comune: e tirata per gli loro centri F, G la retta EeHK, si uniscano le BH, HA, BK, KA. Inoltre si tiri la AeL, e finalmente uniscansi le B*e*, BL. E poichè gli angoli B*e*A, BKA fanno due retti, del pari che gli altri BLA, BHA; perciò quelli saranno uguali a questi. Ma l'angolo BKA è minore dell'altro BHA; adunque l'altro angolo B*e*A dovrà esser maggiore di BLA; e quindi il punto *e* dell' arco B*e*A dovrà cadere al di sotto dell' altro arco BEA: che perciò l' arco BEA dovrà esser maggiore dell' altro B*e*A. C.B.D.

ALITER

I due cerchi proposti AED, *b*E*c* (*fig.* 14) suppongansi toccare al di dentro in E; si tiri la retta EFG per gli loro centri, e s'intendano applicate nell'uno, e nell'altro cerchio le corde *bc* uguali, BC perpen-

dicolarmente alla retta EFG, ed uguali tra loro: è chiaro che se il centro F del cerchio *b*E*c* si supponga scorrere sulla retta FE, finchè il punto K passi in H, cioè finchè la *bc* coincida colla BC, ed i punti *b*, *c* cadano sopra gli altri B, C; in tal caso l'arco *b*E*c* dovrà necessariamente comprendere l'altro BEC, e quindi esserne maggiore.

69. *Cor.* Quindi *l'arco di cerchio massimo minore della semicirconferenza rappresenta la minima distanza, sulla superficie della sfera, tra i due punti pe' quali passa*. Ed è per questa ragione, ed anche per l'altra, che gli archi di cerchi massimi sono determinati, quando è dato il raggio della sfera cui si appartengono, ch' essi si prendono per lati de' triangoli sferici.

70. *Scol.* Che l'arco circolare AEB sia maggiore dell' altro A*e*B, si rileva facilmente dal principio 1. de' Teoremi di Archimede; ed ecco in qual modo. Si tirino agli archi AEB, A*e*B (*fig.*13) le tangenti AY, AX nel punto A in dov'essi s' intersegano, e poi si tiri la AZ, che divida comunque l'angolo YAX compreso da quelle tangenti; una tal retta non potrà intersegare, che il solo arco esteriore AEB. E quindi chiaramente ne risulta, che si possa iscrivere in questo un perimetro, che non abbia di comune coll' arco A*e*B che i soli estremi A, B. Ed è facile il vedere, che si possa anche circoscriver sempre all' arco A*e*B un' altro perimetro di cui due lati sien parti delle tangenti tirate per A, B, e che affatto interseghi quel primo. Or è chiaro che essendo l' arco AEB maggiore del perimetro in esso iscritto, sia anche maggiore dell'altro pe-

rimetro circoscritto all'arco AeB, e quindi di tal arco.

## PROPOSIZIONE IV.

### TEOREMA.

71. *Se in una sfera si tirino i tre cerchi massimi ADB, AEB, AFB ( fig. 15. ) i quali abbiano lo stesso diametro AB; gli angoli sf rici in A, ed in B, che vengono formati dalle circonferenze di questi cerchi, saranno proporzionali agli archi DE, EF dell'altro cerchio massimo, che ha per asse la AB, e che sono intercetti tra le circonferenze di qu'' primi cerchi :* cioè, *sarà l' angolo DAE all' altro EAF, come l' arco DE all' arco EF.*

Imperocchè si prenda l' arco DC = DE, e l' altro FG = DF, e s' intendano descritti, per gli punti C, e G gli altri cerchi massimi ACB, AGB: è chiaro che se il punto C passi in D, il punto D passerà in E, e l' angolo CAD combacerà all' altro DAE; che perciò essi saranno uguali. E similmente l' angolo GAF sarà uguale all' altro FAE. Laonde l' angolo CAE, e l' arco CE saranno ugualmente multiplici dell' angolo DAE, e dell'arco DE; come pure l' angolo EAG, e l' arco EG saranno ugualmente multiplici dell' angolo EAF, e dell' arco EF. Ma è poi vero che l' angolo CAE uguaglierà, sarà maggiore, o pur minore dell'angolo EAG, secondo che l' arco CE pareggerà, sarà maggiore, o minore dell'arco EG. Adunque dovrà stare l' angolo DAE all' angolo

EAF, come l' arco DE all' arco EF. C. B. D.

72. *Cor.* Essendo gli archi DE, EF come gli angoli DOE, EOF al centro del cerchio HOK; saranno anche gli angoli sferici DAE, EAF come gli angoli DOE, EOF. Ma questi angoli sono precisamente quelli che rappresentano l' inclinazione de' cerchi ADB, AEB; AEB, AFB. Laonde *gli angoli sferici sono come gli angoli d' inclinazione de' piani de' cerchi, le circonferenze de' quali comprendono gli angoli sferici.* E siccome se tirinsi a' due cerchi ADB, AEB le tangenti AL, AM nel punto A; l'angolo LAM è quanto l'angolo DOE; quindi anche *l' angolo LAM delle tangenti i lati di un angolo sferico DAE, nel vertice di esso, si può prendere per l'angolo sferico.*

73. *Scol.* Essendo di 360° l' intera circonferenza HEK; anche di 360° dovranno essere tutti gli angoli sferici, che si verranno a formare in A da quanti cerchi si vogliono. E così si potrà dimostrare, che gli angoli sferici verticali sieno uguali; che gli angoli sferici conseguenti sieno uguali a due retti; ed altre cose, che per brevità tralascio.

## PROPOSIZIONE V.

### TEOREMA.

74. *Ogni lato di un triangolo sferico è minore di 180°.*

Imperocchè sieno DC, DA (*fig.* 16) due lati di un angolo sferico; è egli chiaro, che per terminare un triangolo sferico, debbono questi esser segati da

un terzo arco AC prima che si riuniscano di nuovo in B, alla distanza di 180° da D. Dunque ec.

## PROPOSIZIONE VI.

### TEOREMA.

75. *La somma di due lati di un triangolo sferico è sempre maggiore del terzo.*

Poichè tirandosi da' vertici degli angoli di un triangolo sferico i tre raggi al centro della sfera cui esso si appartiene; si verrà a formare un angolo solido in cui due de' tre angoli che lo comprendono sono sempre maggiori del terzo (20.XI): che perciò i lati del triangolo sferico misurando quegli angoli, dovranno esser tali, che due, comunque presi sieno sempre maggiori del terzo.

## PROPOSIZIONE VII.

### TEOREMA.

76. *I tre lati di un triangolo sferico presi insieme sono minori di* 360°.

Sia il triangolo ADC, i cui lati DA, DC si prolunghino fino ad incontrarsi di nuovo in B: ed essendo AC minore di AB+BC (75), ed AB+BC = 360° — AD — DC; sarà AC minore di 360° — AD — DC. Laonde aggiuntovi di comune AD + DC, sarà AC+AD + DC minore di 360°.

77. *Cor.* Quindi si potrà sempre supporre, che un triangolo sferico sia la base di un angolo solido, che ha per vertice il centro della sfera cui si appartiene un tal triangolo, ed i cui angoli sono misurati da' lati di questo (75,76).

## PROPOSIZIONE VIII.

### TEOREMA.

78. *Se in un triangolo sferico, preso per polo ciascun vertice de' suoi angoli, si descrivano tre archi di cerchi massimi; questi incontrandosi formeranno un altro triangolo sferico, i cui lati, e gli angoli saranno supplementi degli angoli, e de' lati del proposto.*

P. 1. Imperocchè essendosi descritto col polo A (*fig.*17) l' arco DE, è chiaro che il punto E sarà distante per 90° dall' altro A; ma col polo B si è descritto l' altro arco FE, che perciò E è anche a 90° di distanza da B: adunque il punto E sarà polo dell' arco AB. E così pure si dimostra, che D sia polo di AC, ed F di BC. Ciò posto si prolunghi l'arco AB in G, e l'altro AC in H: e poichè $GE = 90^\circ = DH$; sarà $GE + DH = 180^\circ = DH + HE + GH = DE + GH$. Ma GH è misura dell' angolo sferico A (71). Dunque DE è supplemento di A. Ed in simil guisa si dimostrerà essere DF supplemento di C, ed FE supplemento di B.

P. 2. Si prolunghi GA in L, sarà GL misura

dell' angolo E (71). Ma GA = 90° = BL, e perciò GA+BL, cioè GL+AB=180°. Dunque l' angolo E è supplemento dell' arco AB. Ed in simil maniera si dimostrerà esser l' angolo F supplemento di BC, e l'angolo D supplemento di AC.

79. I triangoli ABC, FDE si chiamano *supplementali*, o *polari* l' uno dell' altro.

## PROPOSIZIONE IX.

### TEOREMA.

80. *I tre angoli di un triangolo sferico sono sempre maggiori di* 180°, *e minori di* 540°.

P. 1. Imperocchè se gli angoli di un triangolo sferico non sono maggiori di 180°; i lati del triangolo supplementale saranno 360°, o anche di più. Lo che ripugna (76).

P. 2. Che se la somma degli angoli di un triangolo sferico potesse pareggiar 540°, cioè 6 retti, o almeno un di essi dovrebbe esser maggiore di due retti, o ciascuno de' tre pareggiar due retti. E l' una cosa, e l' altra è impossibile; poichè in tal caso di questa stessa grandezza dovrebbero anch' essere gli angoli rettilinei, che rispettivamente gli pareggiano (72).

81. *Cor.* 1. Da ciò ne segue, che *prolungandosi un de' lati di un triangolo sferico, l' angolo esteriore è sempre minore de' due interiori, ed opposti*; poichè questi insieme col terzo angolo del triangolo fanno più di 180°; mentre quello insieme

collo stesso terzo angolo sono uguali a 180° (73).

82. *Cor.*2. E se un triangolo sferico ha un angolo retto, gli altri due possono essere o anche retti, o ottusi, o pure acuti; ma in quest' ultimo caso ciascun di essi deve esser sempre maggiore di 45°.

83. *Scol.* La somma degli angoli di un triangolo sferico potendo variare da 180° fino a 540°, ne segue, che a differenza de' triangoli rettilinei, negli sferici non si può da due angoli determinare il terzo; che perciò i tre angoli di un triangolo sferico non formano due dati, come ne' rettilinei; ma tre distinti.

## PROPOSIZIONE X.

### TEOREMA.

84. *Due triangoli sferici che hanno i lati uguali, ciascuno a ciascuno, e che sono nella stessa superficie sferica, hanno anche uguali gli angoli compresi da' lati uguali.*

*Cas.*1. Sieno BAC, *bac* i triangoli sferici proposti; e primieramente i lati uguali corrispondansi alla stessa parte, cioè BA sia uguale a *ba* (*fig.*18.*n.*1), CA a *ca*, e BC a *bc*. Sia inoltre O il centro della sfera alla quale essi si appartengono; e da questo punto s' intendano condotti i raggi a' vertici degli angoli de' proposti triangoli: è chiaro che si verranno in tal modo a costituire nel punto O due angoli solidi (77) compresi ognuno da tre an-

goli uguali, ciascuno a ciascuno; che perciò essi si potranno far combaciare; ed allora cadrà il punto *a* in A, *c* in C, *b* in B: quindi il triangolo *bac* combacerà coll'altro BAC; e perciò gli sarà uguale.

*Cas.* 2. Che se i lati uguali non si corrispondano, come si vede nella *fig.* 18.*n*.2, ove il lato BC del triangolo BAC è da una parte, e l' uguale *bc* nell' altro triangolo *bac* è dall' altra: in tal caso è chiaro, come la figura stessa rappresenta, che i due triangoli sferici BAC, *bac* sien propriamente quelli, che sottendono due angoli solidi verticali posti al centro O di una sfera. Or si vede, che il piano BA*ba* s' inclina all' altro BC*bc* sotto un angolo, ch' è uguale sì a quello compreso dagli archi BA, BC, che dagli altri *ba*, *bc* (72). Laonde i due angoli sferici ABC, *abc* sono tra loro uguali. E similmente si dimostrerà, che sia l' angolo ACB uguale all'altro *acb*, e l'angolo BAC uguale a *bac*. Dunque ec. C. B. D.

85. *Cor.* Da questa proposizione se ne deriva l' altra, che: *Se due triangoli sferici, che sono nella stessa superficie sferica, hanno gli angoli uguali, ciascuno a ciascuno, avranno anche uguali, l' uno, all' altro, i lati che sottendono questi angoli.* Poichè avendo i triangoli proposti uguali rispettivamente gli angoli; i loro supplementali avranno uguali rispettivamente i lati: quindi dovranno essere equiangoli (84); e perciò i loro supplementali, cioè i proposti, saranno equilateri tra loro. E ciò costituisce una differenza essenziale de' triangoli sferici da' rettilinei.

## PROPOSIZIONE XI.

### TEOREMA.

86. *Due triangoli sferici, che sono sulla medesima sfera, se hanno due lati uguali a due lati, ciascuno a ciascuno, e l'angolo compreso uguale all' angolo compreso; avranno la base uguale alla base.*

*Cas.* 1. Sieno BAC, *bac* (*fig* 18.*n*.1) i triangoli sferici proposti, e sieno essi primieramente tali, che i lati uguali si corrispondano, in modo che sia BA=*ba*, BC=*bc*, e l' angolo B=*b*; è manifesto che il triangolo *bac* si può far combaciare coll'altro BAC, e quindi che siano uguali le rimanenti cose dell' uno, e dell' altro.

*Cas.* 2. Che se quei triangoli non sieno similmente disposti, come gli dinota la *fig*.18.*n* 2; allora congiunto similmente il centro O della sfera, cui essi si appartengono, co' punti A, B, C, *a*, *b*, *c*, è chiaro che essendo gli archi AB, BC uguali agli altri *ab*, *bc*, sien pure gli angoli AOB, BOC uguali agli altri *a*O*b*, *b*Oc; ma di più i piani AOB, *a*O*b* sono similmente inclinati agli altri COB, *c*O*b*; poichè gli angoli ABC, *abc* si sono supposti uguali (77). Adunque è facile il vedere, che se pongasi il raggio BO in diretto coll' altro O*b*, debba il raggio AO essere in diretto con O*a*, e CO con O*c*: che perciò gli angoli AOC, *c*O*a* saranno uguali; e quindi anche gli archi AC, *ac*. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XII.

### TEOREMA.

87. *Se due triangoli sferici di una stessa sfera, hanno un lato uguale ad un lato, e gli angoli adjacenti a questi lati sono anche uguali; saranno pure uguali i rimanenti lati, ciascuno a ciascuno, quelli, cioè, che sono opposti agli angoli uguali.*

*Cas.* 1. Sieno primieramente i triangoli sferici BAC, *bac* (*fig.*18.*n.*1.) disposti in modo, che si corrispondano gli angoli uguali, cioè che essendo BA uguale a *ba*, sia l'angolo BAC=*bac*, e l'angolo ABC=*abc*: è manifesto, ch' essi si potranno far combaciare; e perciò sarà vero ciò che si è proposto.

*Cas.* 2. Che se gli angoli uguali non si corrispondano (*fig.*18.*n.*2); allora è chiaro, che congiunti i vertici degli angoli di ciascuno de' triangoli col centro O della sfera, se suppongasi che gli angoli uguali AOB, *b*O*a* sieno verticali; debbano per l' uguaglianza degli angoli CBA, *cba*, i piani BOC, e *b*O*c* esser similmente inclinati allo stesso piano, AB*ba* (72): che perciò questi ne costituiranno un solo; ed un solo ne costituiranno, per la stessa ragione, i due altri piani COA, *a*O*c*. Adunque le CO, O*c* rappre-senteranno una sola linea retta; e quindi saranno uguali sì gli archi BC, *bc*, che gli altri CA, *ca*. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

88. *Gli angoli alla base di un triangolo sferico isoscele sono uguali tra loro.*

*Ed un triangolo sferico, che ha due angoli uguali; ha pure uguali i lati che oppongonsi ad essi.*

P. 1. Si biseghi la base BC in D (*fig.* 19), e per questo punto, e per l' altro A si faccia passare l'arco DA di cerchio massimo; è chiaro che i due triangoli sferici ABD, ACD, avendo i lati uguali, ciascuno a ciascuno, debbano avere anche uguali gli angoli B, C, i quali sottendono gli uguali lati AC, AB (84).

P. 2. Il triangolo sferico BAC (*fig.* 17), avendo uguali gli angoli in B, C; il suo supplementale DFE dovrà avere uguali i lati EF, FD. Laonde anche gli angoli in D, E saranno uguali (part. 1); e per conseguenza uguali saran pure i loro supplementi, cioè i lati AC, AB del triangolo sferico proposto.

89. *Cor.* Quindi *un triangolo sferico ch' è equilatero, deve essere anche equiangolo*; ed al contrario, *un triangolo sferico equiangolo sarà equilatero.*

90. *Cor.* 2. *Ed in un triangolo sferico isoscele, l' arco di cerchio massimo che passa per lo vertice del triangolo, e per lo punto medio della sua base, è perpendicolare a questa.*

## PROPOSIZIONE XIV.

### TEOREMA.

91. *In ogni triangolo sferico, il maggior angolo è sotteso dal maggior lato, ed il minore dal minore. Il maggior lato poi è sotteso dall' angolo maggiore, ed il minore dal minore.*

P. 1. Sia ADC (*fig.*16) un triangolo sferico, in cui l' angolo C è maggiore dell' altro A; e per mezzo dell'arco C$d$ si supponga fatto l'angolo AC$d$ uguale ad A, sarà l' arco A$d$=C$d$ (part.2.p.13); e quindi l' arco AD, ch' è quanto A$d$+$d$D, sarà uguale a C$d$+$d$D. Ma C$d$+$d$D è maggiore di CD (75): dunque anche AD sarà maggiore di CD.

P. 2. Che se AD suppongasi maggiore di CD; l' angolo C dovrà esser maggiore dell' altro A; poichè nel caso che gli si supponesse uguale, sarebbe l' arco AD=DC (part.1); e supponendosi l'angolo C<A, ne risulterebbe l' arco CD>AD. E l' una, e l' altra cosa ripugna alla supposizione fatta.

Adunque in ogni triangolo sferico ec. C. B. D.

## PRINCIPJ PER LA RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI.

---

### AVVERTIMENTO.

92. Per brevità dinoteremo con A, B, C gli angoli di un triangolo sferico, indicando queste lettere, quelle che sono al vertice di essi; e con *a*, *b*, *c* esprimeremo que' lati di un tal triangolo, che sono opposti a quelli angoli.

93. *Def.* III. La *Trigonometria sferica* dà le regole per risolvere su i triangoli sferici quello stesso Problema, che la Trigonometria Piana risolve su i triangoli rettilinei, cioè: *Date tre di quelle che diconsi parti del triangolo sferico, non esclusi i tre angoli* (83); *determinare le tre parti, che rimangono.*

94. *Scol.* Essendo sei le parti di un triangolo sferico trigonometricamente considerato, delle quali in ogni quistione ne debbono esser date tre, non esclusi i tre angoli; ne segue, che i casi di un tal Problema generale dovrebbero esser 20. Ma siccome alcuni di essi distinguonsi nella grandezza de' dati, e non già nella qualità loro, essendovene sei ne' quali sono sempre dati due angoli, ed un lato opposto ad uno di essi; sei altri in cui sono dati due lati, ed un angolo ad un di essi opposto; e così pure tre in cui sono dati due angoli, ed un lato adjacente; e tre altri in cui sono dati due lati, e

l' angolo compreso, ciò fa sì, che le regole per la risoluzione de' 20 casi debbono generalmente riguardare i sei seguenti

I. *Se sien dati i tre lati*.

II. *O i tre angoli*.

III. *Se sien dati due lati, e l'angolo da essi compreso*.

IV. *O pure due angoli, ed il lato che gli è adjacente*.

V. *Se sien dati due lati, ed un angolo ad un di essi opposto*.

VI. *O pure due angoli, ed un lato opposto ad un di essi*.

Or tutte le regole per la risoluzione di questi casi posson dedursi da' tre seguenti Teoremi.

## PROPOSIZIONE XV.

### TEOREMA.

95. *In ogni triangolo sferico i seni de' lati sono come i seni degli angoli ad essi opposti*.

Sia CBA (*fig*.20) un triangolo sferico, ed i suoi lati CB, CA, AB sieno archi di cerchi massimi di una sfera, il cui centro sia S, e si uniscano le CS, BS, AS. Ciò posto dal vertice di un qualsivoglia angolo C si abbassi sul piano ad esso opposto ASB la perpendicolare CD, e poi da D su i lati SA, SB si calino le perpendicolari DE, DF, e si uniscano le CE, CF. E poichè il piano DEC è perpendicolare all' altro SAB (18.XI.), ed SE, che esiste in questo piano è perpendicolare alla loro comune sezione DE; sarà perciò essa anche

normale al piano CED (d.4.XI.), e quindi alla retta CE che giace in esso. Che perciò essendo le CE, ED perpendicolari nello stesso punto E alla comune sezione SA de' piani SAC, SAB in cui esse rispettivamente esistono; l' angolo CED dinoterà l' inclinazione di tali piani (d.6.XI.). E similmente si dimostra, che l' angolo CFD sia quello d' inclinazione del piano CSB all' altro SBA. Laonde gli angoli CED, CFD che rappresentano le inclinazioni de' piani CSA, CSB, in cui esistono gli archi CA, CB al piano ASB in cui è l' arco AB; si potranno prendere per gli angoli in A, e C del triangolo sferico CAB (72).

Or poichè nel triangolo rettilineo CED rettangolo in D sta

CE : CD :: R : sen. CED (45)

e similmente nell'altro triangolo rettangolo DCF, sta

DC : CF :: sen. CFD : R

sarà per equalità perturbata

CE : CF :: sen. CFD : sen. CED

Ma CE, e CF sono rispettivamente i seni degli archi CA, CB; e gli angoli CFD, CED sono gli stessi che gli angoli in C, ed in A del triangolo sferico CAB. Adunque sarà

sen. CA : sen. CB :: sen.B : sen.A

E similmente si potrà dimostrare, che sia

sen. CB : sen. BA :: sen.A : sen.C.

Laonde i senì de' lati di un triangolo sferico ec.

96.*Scol.* Questo Teorema comprende già in se la risoluzione de' casi enunciati ne' precedenti numeri V, e VI, come potrà vedersi nelle Proposizioni 21, e 22.

## PROPOSIZIONE XVI.

### TEOREMA.

97. *Il coseno di un lato di un triangolo sferico è uguale al prodotto de' coseni degli altri due lati, aggiuntovi il prodotto de' seni di questi nel coseno dell' angolo da essi compreso.*

Si supponga fatto l' apparecchio stesso del precedente teorema, e poi dal punto E si abbassi la EG perpendicolare alla SB, e per D si tirì alla stessa SB la parallela DH. Ed essendo gli angoli GES, GSE uguali ad un retto, essi pareggeranno l' angolo SED, ch' è retto: laonde togliendone di comune l' angolo GES, resterà l' angolo GSE, o BSA uguale ad HED.
Or nel triangolo EHD rettangolo in H, deve essere $HD = DE.sen.DEH$ (45) $= DE.sen.BSA = DE.sen.c$; ed è poi $DE = EC.sen.ECD = EC.cos.DEC = sen.b.cos.A$: laonde sarà $HD = sen.b.sen.c.cos.A$. Ma $SG = SE.cos.ESG = SE.cos.c$; ed $SE = SC.cos.ESC = 1 \times cos.b$. Adunque sarà $SG = cos.b.cos.c$: Per lo che essendo $SF = SG + GF = SG + DH$, sarà

$$cos.a = cos.b.cos.c + sen.b.sen.c.cos.A$$

Cioè in generale il coseno di un lato è uguale ec.
98. *Cor.* Essendo

$$cos.a = cos.b.cos.c + sen.b.sen.c.cos.A$$

$$cos.c. = cos.b.cos.a + sen.b.sen.a.\, cos.C$$

$$sen.c = \frac{sen\ a.sen.C}{sen.A} \quad (95)$$

si avrà sostituendo questi valori di $\cos.c$, e di $\text{sen}.c$ nella prima equazione

$$\cos.a = \cos.b(\cos.b.\cos.a + \text{sen}.b.\text{sen}.a.\cos.C)$$

$$+ \text{sen}.b.\text{sen}.a.\text{sen}.C \times \frac{\cos.A}{\text{sen}.A}$$

e quindi sarà $\cot.A =$

$$\frac{\cos.A}{\text{sen}.A} = \frac{\cos.a - \cos.b^2\cos.a - \text{sen}.b.\text{sen}.a.\cos.b.\cos.C}{\text{sen}.b.\text{sen}.a.\text{sen}.C}$$

e ponendo in tal espressione $1 - \text{sen}.b^2$ per $\cos.b^2$ (29), $\cot.a$ per $\frac{\cos.a}{\text{sen}.a}$, e $\cot.C$ per $\frac{\cos.C}{\text{sen}.C}$, si avrà

$$\cot.A = \cot.a.\frac{\text{sen}\,b}{\text{sen}.C} - \cos.b.\cot.C$$

E se invece di eliminar dalla prima equazione $\cos.c$, e $\text{sen}.c$ si fosse eliminato $\cos.b$, e $\text{sen}.b$, si sarebbe trovato ugualmente

$$\cot.A = \cot.a.\frac{\text{sen}.c}{\text{sen}.B} - \cos.c.\cot.B$$

99. *Scol.* Siccome dati i seni degli archi $b$, $c$, sono anche dati i loro coseni; così l'equazione del presente Teor., la quale esprime il rapporto, che v'è tra un lato di un triangolo cogli altri due, e coll'angolo da questi compreso, non contiene che solamente quattro grandezze diverse; e perciò è chiaro che da tre di esse si potrà determinar la quarta. Così se sien dati $\text{sen}.b$, $\text{sen}.c$, e $\cos.A$, vale a dire due lati, e l'angolo compreso, si potrà determinare il terzo lato; il che risolve i casi espressi nel n°. III. E se fossero dati i tre lati, e quindi $\cos.a.$, $\cos.b$, $\cos.c$, $\text{sen}.b$, $\text{sen}.c$; si potrebbero determinar gli angoli: ed in questo modo restano risoluti quelli altri casi, che contengonsi nel n°. I.

## PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

100. *Il coseno di un angolo è uguale al prodotto de' seni degli altri due angoli nel coseno del lato opposto a quel primo angolo, toltone il prodotto de' coseni di questi secondi angoli.*

Dinotino A′, B′, C′ gli angoli del triangolo supplementale del proposto, ed $a'$, $b'$, $c'$ i lati di esso; sarà

$\cos.a' = \cos.b'.\cos.c' + \text{sen}.b'.\text{sen}.c'.\cos.A'$ (97).
Ma $\cos.a' = -\cos.A$ (18); $\cos.b' = -\cos.B$; $\cos.c' = -\cos.C$; $\text{sen}.b' = \text{sen}.B$; $\text{sen}.c' = \text{sen}.C$; $\cos.A' = -\cos.a$.

Adunque fatte queste sostituzioni, e poi moltiplicando per $-1$ il risultato, si avrà

$$\cos.A = \text{sen}.B.\text{sen}.C.\cos.a - \cos B.\cos.C.$$

101. *Cor.* Se si facciano sull' equazione

$$\cos.A = \text{sen}.B.\text{sen}.C.\cos.a - \cos.B.\cos.C$$

le stesse operazioni che si sono fatte nel Corollario del Teorema precedente si otterrà

$$\cot.a = \cot.A\frac{\text{sen}.C}{\text{sen}.b} + \cot.b.\cos.C$$

102. *Scol.* E quindi se sieno dati gli angoli A, e C, ed il lato $b$ adjacente ad essi, si saprà l'angolo B opposto ad un tal lato (100): e dandosi i tre angoli, si potrà determinare ciascuno de' lati. Vale a dire che per mezzo di questo terzo Teorema restano risoluti gli altri casi compresi ne' num. IV, e II.

RIDUZIONI DELLE ANALOGIE DIMOSTRATE NE' PRECEDENTI TEOREMI, NEL CASO, CHE IL TRIANGOLO SFERICO SIA RETTANGOLO.

103. I. Essendosi dimostrato che sia

$$\text{sen. } a : \text{sen. } b :: \text{sen. A} : \text{sen. B}$$

se l'angolo in A sia retto, e quindi sen.A uguale al raggio; la presente analogia si trasmuterà nell' altra

$$\text{sen. } a : \text{sen. } b :: 1 : \text{sen. B}$$

e darà luogo alla seguente verità

*In ogni triangolo sferico rettangolo, il seno dell' ipotenusa sta al seno di un lato, come il raggio al seno dell' angolo opposto ad un tal lato.*

104. II. Inoltre essendo

$$1 \times \cos.a = \cos.b.\cos.c + \text{sen.}b.\text{sen.}c.\cos.\text{A} \quad (97)$$

se il triangolo si supponga rettangolo in A, e quindi cos.A=o (18), sarà $1 \times \cos.a = \cos.b.\cos.c$; e perciò $1 : \cos.b :: \cos.c : \cos.a$, cioè

*Il raggio al coseno di un lato dell' angolo retto, me il coseno dell'altro lato al coseno dell'ipotenusa.*

105. III. Or $1 \times \cos.\text{B} = \text{sen.A sen.C} \cos.b - \cos\text{A} \cos\text{C}$ (100); e sen.A = 1, cos.A = o (18): laonde sarà

$$1 \times \cos.\text{B} = \text{sen.C}. \cos.b;$$

e quindi $1 : \cos.b :: \text{sen.C} : \cos.\text{B}$, cioè

*Il raggio al coseno di un lato, come il coseno dell'angolo adjacente al coseno dell'angolo opposto.*

106. *Scol.* Le tre precedenti riduzioni de' Teoremi generali (95, 97, 100), e le tre altre verità, che or ora dimostreremo, formano, come si vedrà al n. 115, i principj di risoluzione per tutt' i casi de' triangoli sferici rettangoli.

## PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

107. *In ogni triangolo sferico rettangolo, il raggio sta alla tangente di un angolo, come il seno del lato adjacente alla tangente del lato opposto.*

Sia CAB(*fig.*20) un triangolo sferico rettangolo in A, esistente su di una superficie sferica, che abbia per centro il punto S. Si congiungano le SA, SC, SB, ed abbassata dal vertice C di uno degli altri due angoli la perpendicolare CE sulla SA, si tiri da E la EF perpendicolare alla SB, e si unisca la CF. É chiaro, che essendo retto l'angolo sferico in A, debba il piano CSA esser perpendicolare all'altro ASB (72); quindi che la CE sia a questo stesso piano perpendicolare (d.4.XI.), e per conseguenza che il piano CEF sia anche perpendicolare all' altro ASB. Ma è poi la SF perpendicolare alla comune sezione EF de' piani ASB, EFC; quindi sarà essa normale a questo piano EFC, e perciò l'angolo SFC è retto (d.3.XI.): laonde l'angolo EFC compreso dalle EF, FC perpendicolari alla SB, sarà quanto l'angolo sferico in B(d.6.XI, e n°,72).

Or dal triangolo SFE rettangolo in F si rileva $SE=\frac{EF}{\text{sen.}FSE}=\frac{EF}{\text{sen.}c}$; e dall'altro SEC si ha poi $SE=\frac{CE}{\text{tang.}CSE}=\frac{CE}{\text{tang.}b}$ : laonde $\frac{EF}{\text{sen.}c}=\frac{CE}{\text{tang.}b}$; e perciò EF:CE :: sen.$c$:tang.$b$. Ma per lo triangolo

CEF rettangolo in E, sta EF:CE :: 1:tang.EFC, cioè :: 1:tang.B: dunque sarà 1:tang.B :: sen.*c*:tang.*b*.

108. *Scol.* I. Avendo tutt' i seni lo stesso segno +, è chiaro che, nella precedente proporzione, debbano avere il segno stesso sì tang.B, che tang.*b*; donde se ne rileva, che: *N' triangoli sferici rettangoli, ciascun lato è della stessa specie dell'angolo che gli è opposto*, cioè, che il numero de' gradi che gli dinota è per tutti due minore di 90°, o maggiore.

109. *Scol.* II. Di più essendo 1 > sen.*c*; dovrà esser anche tang.B > tang.*b*. Quindi se mai i segni di queste sieno positivi, cioè che B, e *b* sieno ciascuno minore di 90° (18), sarà B > *b*; se poi saranno negativi, e perciò B, e *b* ciascuno maggiore di 90°, sarà B < *b* (19). Laonde *ne' triangoli sferici rettangoli, ogni angolo obbliquo non può mai esser minore se acuto, maggiore se ottuso del lato che gli è opposto*

## PROPOSIZIONE XIX.

### TEOREMA.

110. *In ogni triangolo sferico rettangolo, la tangente dell' ipotenusa sta alla tangente di un lato, come il raggio al coseno dell' angolo adjacente.*

Sia il triangolo sferico ABC rettangolo in A (*fig.* 16), i cui lati, e l' ipotenusa si prolunghino sino a 90°, e sieno essi BG, AF, BE: è chiaro, che il punto F essendo il polo dell' arco BAG, debba essere a 90° di distanza dal punto B. Ma questo punto B è anche distante per 90° dagli altri E,

G. Adunque per gli tre punti F, E, G vi passerà un arco di cerchio massimo il cui polo è B (63); che perciò gli angoli in E, ed in G sono retti. Quindi l' arco FE, ch' è complemento dell' altro EG, sarà complemento dell'angolo B, che da quest' arco è misurato: al contrario sarà l' angolo F, ch' è misurato dall' arco AG, il complemento di AB: ed è poi l' arco FC complemento di CA, e CE di CB. Ciò posto, poichè nel triangolo sferico FEC rettangolo in E sta

1 : tang.F :: sen.FE : tang.CE (107)

sarà, per l'apparecchio poc'anzi fatto, e permutando

1 : cos.B :: cot.BA : cot.BC

Ma sta cot.BA : cot.BC :: tang.BC : tang.BA (17)
Dunque sarà pure 1 : cos.B :: tang.BC : tang.BA.

111. *Scol.* Il triangolo CEF suol dirsi *complementale* dell' altro BCA.

## PROPOSIZIONE XX.

### TEOREMA.

112. *In ogni triangolo sferico, rettangolo il raggio sta al coseno dell' ipotenusa, come la tangente di un angolo alla cotangente dell' altro.*

Fatto lo stesso apparecchio di poc' anzi, si avrà nel triangolo sferico FCE complementale di BCA

1 : tang.C :: sen.CE : tang. FE (107)

e perciò sarà nel triangolo BAC, e permutando

1 : cos.BC :: tang.C : cot.B

ed anche 1 : cos.BC :: tang.B : cot.C (17) C.B.D.

## RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI.

113. Le parti di un triangolo sferico possono in modo combinarsi tre a tre, come si è veduto nel n°. 94, che ne risultino sei casi assolutamente diversi, alla risoluzione de' quali sono sufficienti que' principj che dal n°. 95 in poi abbiamo stabiliti, come passiamo a mostrare ne' seguenti numeri. Intanto per serbare, per quanto si può, l'uniformità di questo trattato con quello della Trigonometria Rettilinea, ed anche per proceder gradatamente, incomincieremo dalla

### RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI RETTANGOLI;

114. Un triangolo sferico può aver retti o tutti tre i suoi angoli, o due, o uno (80): nel primo caso esso è intuitivamente risoluto; poichè ciascuno de' suoi lati deve necessariamente esser di 90° (77). Se poi ha due angoli retti, i lati che gli sottendono debbono essere anche di 90°: ma questi dati non ne formano che due, e quindi non valgono a far risolvere il triangolo. Ed in fatti se per gli poli A, B del circolo massimo HEK si facciano passare gli altri cerchi AEB, AFB, AGB; è chiaro che tutti i triangoli sferici EAF, FAG hanno due angoli retti, ed i lati a questi opposti di 90°: che perciò questi stessi dati potendo appartenere ad infiniti triangoli diversi; la specie delle rimanenti due parti di ciascun di essi non può restarne determinata. Quel-

lo che si sa solamente si è, che il terzo lato, ed il terzo angolo sono uguali tra loro, sicchè dato l' uno si ha anche l' altro. Dunque questo triangolo nè anche va compreso per la sua risoluzione nelle regole poc' anzi date; che perciò non ci resta a considerare, che quei triangoli sferici rettangoli, che hanno un solo angolo retto.

## PROPOSIZIONE XXI.

### PROBLEMA.

115. *In un triangolo sferico rettangolo, date due delle sue parti; determinare le rimanenti.*

CASO I.

Sien dati (*fig.*16) i cateti BA, AC ($b$, $c$). Per determinare l' ipotenusa BC ($a$), si faccia R:cosAB :: cosAC:cos.BC(104); sarà $\cos.a = \cos.b.\cos.c$ Si farà quindi noto $\cos.a$, e l' arco $a$ apparirà dalle Tavole. Se però $\cos.a$ risulti negativo, un tal arco sarà il supplemento di quello che nelle Tavole si sarà rinvenuto (18).

Per aver poi l' angolo B, si faccia

sen.AB:tang.AC :: R:tang.B (107); e $\text{tang.B} = \frac{\text{tang.}b}{\text{sen.}c}$

E similmente si troverà essere $\text{tang.C} = \frac{\text{tang.}c}{\text{sen.}b}$

CASO II.

Che se diasi un cateto AC ($b$), e l' ipotenusa BC ($a$). Per aver l'altro cateto AB ($c$): dovrà farsi cos.AC:cos.BC :: R:cos.AB (104); sarà $\cos.c = \frac{\cos a}{\cos.b}$

E si troverà poi l' angolo obbliquo C adjacente al lato dato, con fare

tang.BC:tang.AC :: R:cos.C (110) ; e $\cos.C = \frac{\text{tang } b}{\text{tang.} a}$

E l' altro angolo acuto B, che gli è opposto, si otterrà nel seguente modo

sen.BC:sen.AC :: R:sen.B (103); e $\text{sen.B} = \frac{\text{sen.} b}{\text{sen.} a}$

La specie di un tal angolo non sarà dubbia, sebbene espressa dal seno; poichè è la stessa di quella del lato AC, che gli è opposto (108).

CASO III.

E dandosi l' ipotenusa BC ($a$), ed un degli angoli obbliqui B; per avere il lato AC ($b$) opposto a quest' angolo, si dovrà fare

R:sen.B :: sen.BC:sen.AC (103); e sen.$b$=sen.$a$.sen.B

Nè la specie di questo lato sarà dubbia (108).

L' altro lato AB ($c$) adjacente all' angolo B si avrà poi facendo

R:cos.B :: tan.BC:tan.AB(110); e tang.$c$=cos.B.tan.$a$

Finalmente il rimanente angolo C si otterrà per mezzo della seguente analogia

R:cos.BC :: tan.B:cot.C (112); e cot.C=cos.$a$.tan.B

CASO IV.

Che se diasi un lato AC ($b$), e l' angolo C che gli è adjacente. Si avrà l' ipotenusa BC ($a$), col fare

cos.C:R :: tang.AC:tang.BC (110); e $\text{tang.} a = \frac{\text{tang.} b}{\text{cos.C}}$

L'altro cateto AB ($c$); si avrà nel seguente modo

R:sen.AC :: tan.C:tan.AB(107); e tan.$c$=tan.C.sen.$b$

Finalmente per aver il rimanente angolo B, si dovrà dire

R.cos.C :: cos.AC:cos.B (105); e $\cos.B = \cos.C.\cos.b$

CASO V.

Se poi diansi il lato AC ($b$), e l'angolo B che gli sta opposto. L'ipotenusa BC ($a$) si avrà col fare sen.B:sen.AC :: R:sen.BC (103); e $\text{sen.}a = \frac{\text{sen.}b}{\text{sen.B}}$

L' altro cateto AB ($c$) si avrà dalla proporzione tang.B:R :: tang.AC:sen.AB (107); e $\text{sen.}c = \frac{\text{tang.}b.}{\text{tang.B}}$

Ed il rimanente angolo C si otterrà facendo cos.AC:R :: cos.B:cos.C (105); e $\cos.C = \cos.B.\cos.b$

Questo caso è *dubbio*;, poichè è chiaro che se si prolunghino i lati BC, BA del proposto triangolo sferico, finchè s' incontrino in D; l' angolo B sarà uguale all'altro D (71); e quindi gli stessi dati si apparterranno sì al triangolo sferico BAC, che all'altro DAC. Laonde non si potrà mai venire in cognizione se l' ipotenusa del triangolo che si risolve sia l' arco BC minore di un quadrante, o pur l' altro DC, che n' è il supplemento: e similmente non potrà determinarsi, se l' altro lato, e l' angolo ignoti sieno BA, e BCA, o pure i loro supplementi rispettivi DA e DCA, a meno che le circostanze della quistione non levino l' incertezza.

CASO VI.

Finalmente se sien dati gli altri due angoli B, C. Si avrà l' ipotenusa BC ($a$), nel seguente modo tang.B:cot.C :: R:cos.BC (112); e $\cos.a = \frac{\cot.C}{\text{tang.B}}$

Ed un de' cateti AB ($c$) si rinverrà facendo cos.B:cos.C :: R:cos.AB (105); e $\cos.AB = \frac{\cos.C}{\cos.B}$

## SCOLIO

### DI ALCUNI TRIANGOLI SFERICI, LA CUI RISOLUZIONE DIPENDE DA QUELLA DE' TRIANGOLI RETTANGOLI.

## PROPOSIZIONE XXII.

### PROBLEMA.

116. *Risolvere un triangolo sferico, in cui un de' lati sia di 90°.*

Sia ABC un tal triangolo sferico (*fig.*17), e BC il suo lato di 90°. E poichè descritto il triangolo supplementale DFE, l' angolo F deve anch' essere di 90° (77); perciò questo triangolo supplementale sarà rettangolo. Laonde se i dati nel triangolo BAC si trasportino convenevolmente nel triangolo DFE, e che poi questo si risolva, si sarà anche risoluto l' altro BAC.

## PROPOSIZIONE XXIII.

### PROBLEMA.

117. *Risolvere un triangolo sferico isoscele.*

Abbia il triangolo sferico BAC (*fig.*19) i lati BA, AC uguali, e dal vertice A si conduca al punto medio D del lato opposto BC l' arco di cerchio massimo AD, il quale dividerà il triangolo BAC

in due triangoli rettangoli (90); ed è chiaro, che la risoluzione del triangolo BAC si ridurrà a quella di uno di questi triangoli rettangoli.

## PROPOSIZIONE XXIV.

### PROBLEMA.

118. *Risolvere il triangolo sferico BAC, in cui due lati AB, AC sieno supplementi l'uno dell' altro.*

Si prolunghino i lati AB, e BC, finchè s' incontrino in D; sarà AD uguale ad AC. E quindi il triangolo CAD, essendo isoscele, si potrà risolvere come nel Probl. prec. Ma i triangoli BAC, ADC sono in modo connessi, che dalle parti dell' un triangolo sono sempre determinabili quelle dell' altro; giacchè i lati AB, e BC dell'uno sono supplementi de' lati AD, DC dell' altro, il lato AC è comune, gli angoli in B, e D sono uguali, e gli angoli BAC, BCA sono supplementi degli angoli DAC, DCA. Adunque la risoluzione del triangolo BAC dipende da quella del triangolo isoscele ADC.

119. *Scol.* È facile il vedere, che nel triangolo proposto ABC debba esser anche l' angolo ABC supplemento dell'angolo BCA. Poichè essendo ACB supplemento di ACD, lo sarà anche dell' angolo in D (83); e quindi dell' altro in B ch' è uguale quello in D (72).

RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI OBBLIQUANGOLI.

## PROPOSIZIONE XXV.

### PROBLEMA:

120. *In un triangolo sferico obbliquangolo, date tre delle sue parti; determinare le rimanenti.*

CASO I.

Sien dati in primo luogo (*fig.*20) i tre lati BC, CA, AB, ($a$, $b$, $c$), e si cerchino gli angoli A, B, C

L'equaz. $\cos.a=\cos.b.\cos.c+\text{sen}.b.\text{sen}.c.\cos.A$ (97)

darà $\cos.A = \dfrac{\cos.a-\cos.b.\cos.c}{\text{sen}.b.\text{sen}.c}$

Onde si avrà il coseno dell' angolo A; e quindi quest' angolo. E similmente si determineranno gli altri. Ed è chiaro che in questo caso non vi resti dubbio sulla specie di ciascuno degli angoli: poichè essendo essi esibiti da' coseni; la specie loro resterà fissata dal segno di questi (18). E lo stesso può dirsi de' tre seguenti casi

CASO II.

In secondo luogo si sappiano i tre angoli A, B, C, e si cerchino i lati BC, CA, AB, ($a$, $b$, $c$) Si avrà il lato BC ($a$), per mezzo dell' equazione

$\cos.A=\text{sen}.B.\text{sen}.C.\cos.a-\cos.B.\cos.C$ (100),

dalla quale se ne ricava

$$\cos.a = \frac{\cos.A+\cos.B.\cos.C}{\text{sen}.B.\text{sen}.C}$$

E per mezzo delle corrispondenti equazioni si determineranno gli altri due lati AB, AC ($b$, $c$).

CASO III.

Che se diensi due lati AC, AB ($b$, $c$), e l' angolo A da essi compreso; si determinerà il terzo lato BC ($a$), per mezzo dell' equazione

$$\cos.a = \cos.b.\cos.c + \text{sen}.b.\text{sen}.c.\cos.A$$

Ed il triangolo si terminerà di risolvere come nel Caso I. E se vogliansi ottenere i rimanenti angoli B, C senza prima determinare il lato BC ($a$), si adopreranno le due seguenti equazioni

$$\cot.B = \cot.b.\frac{\text{sen}.c}{\text{sen}.A} - \cos.c.\cot.A \quad (98)$$

$$\cot.C = \cot.c.\frac{\text{sen}.b.}{\text{sen}.A} - \cos.b.\cot.A \quad (98)$$

CASO IV.

E dandosi due angoli B, C, ed il lato BC ($a$), che gli è adjacente. Si avrà il terzo angolo A, per mezzo dell' equazione

$$\cos.A = \text{sen}.B.\text{sen}.C.\cos.a - \cos.B.\cos.C \quad (100)$$

E le rimanenti parti del triangolo si otterranno come nel Caso II. Che se queste vogliansi indipendentemente dall' angolo A, bisognerà cercarle nel seguente modo

$$\cot.b = \cot.B.\frac{\text{sen}.C}{\text{sen}.a} + \cos.C.\cot.a \quad (101)$$

$$\cot.c = \cot.C.\frac{\text{sen}.B}{\text{sen}.a} + \cos.B.\cot.a \quad (101)$$

CASO V.

In quinto luogo le parti date del triangolo sieno i due lati AC, AB ($b$, $c$), e l' angolo B opposto ad un di essi. Per aver l' angolo C, che

sta opposto all' altro lato, bisognerà fare

$$\text{sen.}AC:\text{sen.}AB :: \text{sen.}B:\text{sen.}C(95);\text{sen}C=\frac{\text{sen.}B.\text{sen.}c}{\text{sen.}b}$$

È chiaro, che in questo caso la specie dell' g.lo C sarà dubbia: un tal angolo C sarà però sempre maggiore dell'altro B, nel caso che si sappia che il lato $c$ sia maggiore di $b$; ed al contrario.

Il lato CB si avrà pareggiando tra loro i due valori di cot.A, che si sono ottenuti nel n°. 98, e determinando per mezzo di quest' equazione il valore di cot.$a$.

Finalmente il rimanente angolo A o si determinerà per mezzo del n°. 95, o pure se si voglia indipendentemente dal lato BC ($a$), bisognerà cercarlo maneggiando l' equazione che risulta dal pareggiamento de' valori di cot.$a$, de' quali uno se ne trova espresso al n°. 101, e l' altro è facile a rilevarsi in vista di quello.

CASO VI.

Sien dati finalmente due angoli B, C, e 'l lato AC ($b$) opposto ad un di essi. Per avere il lato AB ($c$) opposto all' altro, si faccia

$$\text{sen.}B:\text{sen.}C :: \text{sen.}AC:\text{sen.}AB(91);\text{sen.}c=\frac{\text{sen.}b.\text{sen.}C}{\text{sen }B}$$

Ed il terzo angolo A, ed il lato BC ($c$), che gli è opposto, si potranno determinare come nel Caso precedente. Le parti del triangolo dimandate in questo caso, sono *dubbie*, come nel precedente.

Adunque si è soddisfatto a quello che dimandavasi in questo Problema. C. B. F.

## REGOLE NEPERIANE, E LORO USI.

121.Siccome il calcolo per la risoluzione de' triangoli, come già altra volta fu indicato, vien grandemente a semplificarsi per mezzo del canone logaritmico, sicchè questo, e non già il canone naturale si adopra negli usi pratici; perciò l' insigne inventore de' logaritmi *Nepero* adattò le regole della risoluzione de' triangoli sì rettilinei, che sferici al canone logaritmico, e non già al lineare. Intanto siccome sì per la risoluzione de' triangoli rettilinei, che per quella degli sferici rettangoli, la parte cercata si ottiene con un semplice quarto proporzionale dopo tre parti date, o le quantità trigonometriche, che le esprimono, come si è già veduto ne' num. 52, e 115, così è molto facile di passar da esse al calcolo logaritmico; poichè non deve farsi altro, che prendere la somma de' logaritmi de' due termini medj della proporzione, e sottrarne quello del primo, per ottenersi il logaritmo del termine cercato; donde poi facilmente questo se ne deduce, per mezzo delle ordinarie Tavole: ed è perciò che oltre le regole date ne' citati numeri, non occorre che altro se ne dica per l' applicazione de' logaritmi ad esse. Non è però così delle regole delle quali ci siamo serviti per la risoluzione de' triangoli sferici obbliquangoli. Imperciocchè venendo esse espresse da alcune formole analitiche composte la maggior parte di più termini, con difficoltà vi si potrebbe applicare il calcolo logaritmico, senza pri-

ma ridurle ad una forma più convenevole. E siccome una tal riduzione ci riconduce ad espressioni algebriche analoghe alle regole Neperiane per la risoluzione di questi triangoli, o facili a dedursi da esse; abbiam creduto perciò conveniente di esibire anche noi le suddètte formole ridotte in forma logaritmica. In tal modo non solamente riescirà più agevole, e meno lungo il servirsene in pratica; ma anche in alcuni casi resteranno tolte quelle difficoltà, che, per la forma dell' espressione algebrica, potrebbero nascere ne' giovani non ancora versati nell' applicazione dell' Algebra alla Geometria, nel distinguere le diverse soluzioni di un Problema dal segno del valore dell' incognita, e nel conoscere quali valori sono di nessun conto, o quali debbonsi rigettare perchè impossibili. A quest' oggetto son destinate le seguenti quattro regole.

LEMMA.

122. *È positivo il coseno della metà di due angoli di un triangolo sferico meno il terzo: ed è negativo l' altro della metà de' tre angoli presi insieme.*

P. 1. Sieno A, B, C gli angoli di un triangolo sferico; i lati del suo supplementale saranno $180^\circ - A$, $180^\circ - B$, $180 - C$ (79), ed un di essi $180^\circ - A$ sarà minore di $360 - B - C$, ch'è la somma degli altri due (75), cioè $B + C - A < 180^\circ$, ed $\frac{1}{2}(B + C - A) < 90^\circ$; che perciò il segno del coseno di quest' arco sarà positivo (18).

P. 2. Poichè $\frac{1}{2}(A + B + C)$ è sempre tra i $180^\circ$, ed i $270^\circ$ (80); è chiaro che il suo coseno debba esser negativo (18).

REGOLA I.

123. *Dalla somma della base, e di un lato di un triangolo sferico se ne tolga l' altro; e poi da' logaritmi de' seni della metà di queste due differenze se ne tolgano i logaritmi de' seni di que' lati; si avrà il logaritmo del seno della metà dell' angolo da essi compreso.*

Dinoti A un tal angolo, $b$, $c$ sieno i lati che lo comprendono, ed $a$ la base del triangolo sferico proposto.

Nell' equazione

$$2\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2}A = 1 - \cos.A \quad (\text{N.4})$$

si ponga per cos.A il suo valore $\dfrac{\cos.a - \cos.b.\cos.c}{\text{sen}.b.\text{sen}.c}$ (97), e poi si riduca; ne risulterà,

$$2\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{\cos.b.\cos.c + \text{sen}.b.\text{sen}.c - \cos.a}{\text{sen}.b.\text{sen}.c}$$

$$= \frac{\cos.(b-c) - \cos.a}{\text{sen}.b.\text{sen}.c} \quad (36)$$

$$= \frac{2\text{sen}.\tfrac{1}{2}(a+b-c) \times \text{sen}\ \tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen}.b.\text{sen}.c}$$

(N.1 n°.IV): e dividendo per 2, e poi passando da' numeri a' logaritmi sarà $2\text{l.sen}\dfrac{A}{2} = \ldots\ldots\ldots$

$$\text{l.sen.}\frac{a+b-c}{2} + \text{l.sen.}\frac{a+c-b}{2} - \text{l.sen}.b - \text{l.sen}.c$$

124. *Scol.* Per mezzo di questa regola resta in pratica determinato agevolmente un qualunque angolo di un triangolo sferico da' suoi lati. Ed è chiaro, che nessun dubbio possa insorgere sulla specie di tal angolo, quantunque la sua metà sia esi-

bita dal seno; poichè questa deve necessariamente esser minore di 90° (72).

REGOLA II.

125. *Al logaritmo del coseno della metà della somma de' tre angoli di un triangolo sferico si aggiunga quello del coseno della metà di due di essi meno l'altro, e poi se ne tolgano i logaritmi de' seni di que' due stessi; s'otterrà il logaritmo del seno della metà del lato che sottende il terzo angolo.*

Nell' equazione

$$2\text{sen}^2\tfrac{1}{2}a = 1 - \cos.a \ (\text{N}.4),$$

si sostituisca $\dfrac{\cos.A+\cos.B.\cos.C}{\text{sen}.B.\text{sen}.C}$ a $\cos.a$ (100); sarà

$$2\text{sen}.^2\tfrac{1}{2}a = -\frac{\cos.B.\cos C-\text{sen}.B.\text{sen}.C+\cos.A}{\text{sen}.B.\text{sen}.C}$$

$$= -\frac{\cos.(B+C)+\cos.A}{\text{sen}.B.\text{sen}.C}$$

$$= -\frac{2\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\times\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sen}.B.\text{sen}.C};$$

N.1.n°.111), e dividendo anche per 2, e poi passando da' numeri a' logaritmi, col cambiar da $-$ in $+$ il segno di $-\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)$ (122); sarà $2\text{l.sen}.\frac{a}{2} =$

$$\text{l.cos}.\frac{A+B+C}{2}+\text{l.cos}.\frac{B+C-A}{2}-\text{l.sen.B}-\text{l.sen.C}$$

126. *Scol.* E per mezzo di questa 2. regola è chiaro, che si saprà il seno della metà di un lato da' tre angoli del triangolo; nè potrà esservi dubbio sulla specie di questa metà, dovendo essa esser sempre minore di 90° (74).

REGOLA III.

127. *Al logaritmo della cotangente della metà di un angolo vi si aggiunga il logaritmo del coseno della semidifferenza de' lati, che gli sono adjacenti, e se ne tolga quello del coseno della semisomma di questi, si avrà il logaritmo della tangente della semisomma de' rimanenti angoli.*

*E si sarebbe avuto il logaritmo della semidifferenza di questi angoli stessi, se a' logaritmi de' coseni di quelle quantità si fossero sostituiti i logaritmi de' seni di esse.*

Nell' equazione $\cos.B.\text{sen}.a = \dfrac{\cos.b - \cos.a.\cos.c}{\text{sen}.c}$ si sostituisca l' equivalente di $\cos.a$ (97), e poi essa si riduca, col porvisi $1-\text{sen}.^2c$ per $\cos.c^2$, si avrà

$$\cos.B.\text{sen}.a = \cos.b.\text{sen}.c - \cos.A.\text{sen}.b.\cos.c$$

E similmente si potrebbe ottener l'altra equazione

$$\cos.C.\text{sen}.a = \cos.c.\text{sen}.b - \cos.A.\text{sen}.c.\cos.b$$

se pur questa non si voglia ricavar dalla precedente con una semplice permutazione di lettere, come suol farsi. E sommando queste due equazioni, e poi riducendo, col sostituire $\text{sen}.(b+c)$ a $\text{sen}.b.\cos.c+\cos.b.\text{sen}.c$, si avrà

$$\text{sen}.a.(\cos.B+\cos.C) = (1-\cos.A)\text{sen}.(b+c) \ \ldots . M$$

Or $\text{sen}.B = \dfrac{\text{sen}.A.\text{sen}.b}{\text{sen}.a}$, e $\text{sen}.C = \dfrac{\text{sen}.A.\text{sen}\ c}{\text{sen}.a}$; adunque sarà

$$\text{sen}.a.(\text{sen}.B+\text{sen}.C) = \text{sen}.A.(\text{sen}.b+\text{sen}.c)$$
$$\text{sen}.a.(\text{sen}.B-\text{sen}.C) = \text{sen}.A.(\text{sen}.b-\text{sen}.c)$$

Quindi se ciascuna di queste due equazioni si di-

vida per l' altra M, ne risulteranno le altre due

$$\text{I.}\quad \frac{\text{sen.B}+\text{sen.C}}{\text{cos.B}+\text{cos C}} = \frac{\text{sen.A}}{1-\text{cos.A}} \times \frac{\text{sen.}b+\text{sen }c}{\text{sen.}(b+c)}$$

$$\text{II}\quad \frac{\text{sen.B}-\text{sen.C}}{\text{cos.B}+\text{cos.C}} = \frac{\text{sen.A}}{1-\text{cos.A}} \times \frac{\text{sen.}b-\text{sen.}c}{\text{sen.}(b+c)}$$

Ma il primo membro della prima equazione pareggia tang.$\frac{1}{2}$(B+C), ed il primo della seconda è uguale a tang.$\frac{1}{2}$(B—C) (N.1. n°.V, e VI); ed i secondi membri di esse sono uguali rispettivamente a

$$\text{cot.}\tfrac{1}{2}\text{A} \times \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(b+c)},\ \text{ed a cot.}\tfrac{1}{2}\text{A}\times\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b)}$$

(N.2, e 3). Dunque sarà

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{B}+\text{C}) = \text{cot.}\tfrac{1}{2}\text{A} \times \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(b+c)}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{B}-\text{C}) = \text{cot.}\tfrac{1}{2}\text{A} \times \frac{\text{sen }\frac{1}{2}(b-c)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(b+c)}$$

E passando da numeri a' logaritmi, sarà

$$\text{l.tang.}\frac{\text{B}+\text{C}}{2} = \text{l.cot.}\frac{\text{A}}{2} + \text{l.cos.}\frac{b-c}{2} - \text{l.cos.}\frac{b+c}{2}$$

$$\text{l.tang.}\frac{\text{B}-\text{C}}{2} = \text{l.cot.}\frac{\text{A}}{2} + \text{l.sen.}\frac{b-c}{2} - \text{l.sen.}\frac{b+c}{2}$$

Le quali equazioni sono quelle della presente regola.

128. *Scol.* Con queste due equazioni, ritrovando semplicemente cinque logaritmi, è chiaro, che si abbia la tangente della semisomma, e della semidifferenza di due angoli di un triangolo sferico, e quindi tali angoli, quando sia dato il terzo angolo, ed i lati che lo comprendono. E per mezzo di ciascuna di esse si potrebbe anche avere un angolo, dati i lati che lo comprendono, e la somma, o la differenza degli altri due angoli; poichè è manifesto, che in tal caso resta determinato l.cot.$\frac{1}{2}$A.

### REGOLA IV.

129. *Al logaritmo della tangente della metà di un lato di un triangolo sferico, vi si aggiunga il logaritmo del coseno della semidifferenza degli angoli ad esso adjacenti, e poi se ne tolga quello del coseno della semisomma di questi; si otterrà il logaritmo della tangente della semisomma degli altri due lati.*

*E si avrà il logaritmo della tangente della semidifferenza di tali due lati, se a' logaritmi de' coseni di quelle quantità, vi si sostituiscano i logaritmi de' seni di esse.*

Dinotinsi con A', B', C' gli angoli del triangolo supplementale del proposto, e per $a'$, $b'$, $c$ i lati opposti ad essi; avran luogo tra le parti di questo triangolo le seguenti due equazioni (127)

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(C'+B') = \text{cot.}\tfrac{1}{2}A' \times \frac{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(c'-b')}{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(b'+c')}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(C'-B') = \text{cot.}\tfrac{1}{2}A' \times \frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(c'-b')}{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(c'+b')}$$

le quali colla sostituzione di $180^\circ-b$, $180^\circ-c$; $180^\circ-a$, $180^\circ-B$, $180^\circ-C$ in luogo di B, C, A, $b$, $c$, si riducono alle altre due

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(b+c) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}a \times \frac{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(B-C)}{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(B+C)}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(b-c) = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}a \times \frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(B-C)}{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(B+C)}$$

E passando in ciascuna di queste due ultime equazioni da' numeri a' logaritmi, si avrà

$$\text{l.tang.}\frac{b+c}{2} = \text{l tang.}\frac{a}{2} + \text{l.cos.}\frac{B-C}{2} - \text{l.cos.}\frac{B+C}{2}$$

$$\text{l.tang.}\frac{b-c}{2} = \text{l.tang.}\frac{a}{2} + \text{l.sen.}\frac{B-C}{2} - \text{l.sen.}\frac{B+C}{2}.$$

ch' è quanto nella presente regola si è enunciato.

130. *Scol.* Laonde, per mezzo di questa regola, si potranno rinvenire i logaritmi della metà della somma, e della metà della differenza de' due lati di un triangolo sferico, se pur sieu dati il terzo lato, e gli angoli adjacenti ad esso: donde è chiaro, che tali lati appariranno ad un tratto. Ed è anche manifesto, che ciascuna di queste due ultime equazioni, ne offra un lato qualunque di un triangolo sferico, dall' esser dati gli angoli ad esso adjacenti, e la semisomma o pur la semidifferenza degli altri due lati; poichè con questi dati si farà noto l.tang.$\frac{1}{2}a$, e quindi $a$

## CONCHIUSIONE

131. Dagli Scólj delle quattro precedenti regole si rileva, che per mezzo di esse restano facilmente e completamente risoluti i CASI I, II, III, IV. della Prop.25: gli altri due V, VI, che comprendono i casi *dubbj*, per la prima loro parte non hanno bisogno di altra formola di risoluzione, oltre quella che ne fu data al n°.121; per quella stessa ragione che fu indicata per gli triangoli rettilinei, e per gli triangoli sferici rettangoli al n°.120. Una volta però, che siasi nel n°. V determinato l' angolo ignoto, ch' è opposto all' altro lato, e nel n°. VI il lato ignoto opposto all' altro angolo dato, si potrà ottenere il terzo angolo, ed il terzo lato, per mezzo delle formole delle Regole III, e IV, nelle quali le ignote sono tang.$\frac{1}{2}$A, e tang.$\frac{1}{2}a$.

## PROPOSIZIONE XXVII.

### PROBLEMA.

132. *Dati i tre angoli piani che comprendono un angolo solido; determinare l' inclinazione di que' piani ne' quali esistono due di essi angoli.*

L'angolo solido proposto sia quello in O (*fig.*21), contenuto da' tre angoli piani FOD, DOE, EOF; e si supponga descritta col centro O, e con qualunque raggio una sfera. É chiaro che l' angolo solido proposto resterà sotteso da un triangolo sferico BAC nel quale sono dati i tre lati BA, BC, CA, perchè sono quegli archi che misurano i corrispondenti angoli piani BOA, BOC, COA: che perciò si potranno determinare gli angoli sferici in A, B, C (120c.1); e quindi si faranno anche noti gli angoli d' inclinazione scambievole de' tre piani FOE, FOD, DOE. C.B.F.

133. *Scol.* Le due soluzioni che abbiamo date di questo stesso Problema importante in pratica, come altrove faremo vedere, (55,e132) serviranno per ora a far rilevare, come si possa spesse volte vantaggiosamente adoperare la Trigonometria sferica in quistioni, che possonsi anche risolvere coll' altra Trigonometria. In fatti nel caso presente tutti i tre angoli d' inclinazione restano ad un tratto, e per mezzo di una sola operazione esibiti; mentre la Trigonometria Rettilinea non poteva esibirli che separatamente, e con più operazioni.

# NOTE

Queste note contengono alcune verità facili a dedursi da' num. 33, e 36, e delle quali si ha bisogno nella dimostrazione delle Regole Neperiane

## Nota I.

Se la somma degli archi $\phi$, e $\theta$ s' indichi per $m$, e per $n$ la differenza loro, sarà

$\phi = \frac{m+n}{2}$, e $\theta = \frac{m-n}{2}$ ( N. pag.36. ); i quali valori di $\phi$, e $\theta$, se sostituiscansi nelle espressioni in cui si sviluppano $\text{sen.}(\phi+\theta)$, $\text{sen.}(\phi-\theta)$, $\cos.(\phi+\theta)$, $\cos.(\phi-\theta)$ (33., e 36) daranno i valori corrispondenti a $\text{sen.}m$, $\text{sen.}n$, $\cos.m$, $\cos.n$, dalla somma de' quali due a due se ne dedurran no le seguenti quattro equazioni, cioè,

$$\text{I. } \text{sen.}m+\text{sen.}n = 2\text{sen.}\tfrac{1}{2}(m+n)\cos.\tfrac{1}{2}(m-n)$$

$$\text{II. } \text{sen.}m-\text{sen.}n = 2\cos.\tfrac{1}{2}(m+n)\text{sen.}\tfrac{1}{2}(m-n)$$

$$\text{III. } \cos.m+\cos.n = 2\cos\tfrac{1}{2}(m+n)\cos.\tfrac{1}{2}(m-n)$$

$$\text{IV. } \cos.m-\cos.n = 2\cos.\tfrac{1}{2}(m+n)\text{sen.}\tfrac{1}{2}(m-n)$$

dalle quali, per mezzo della divisione, se ne ricaveranno le altre

$$\text{V. } \frac{\text{sen.}m+\text{sen.}n}{\cos.m+\cos.n} = \frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(m+n)}{\cos.\tfrac{1}{2}(m+n)} = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(m+n)$$

$$\text{VI. } \frac{\text{sen.}m-\text{sen.}n}{\cos.m+\cos.n} = \frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(m-n)}{\cos.\tfrac{1}{2}(m-n)} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(m-n)$$

E se la V equazione si divida per la VI, si avrà

$$\text{VII. } \frac{\text{sen.}m+\text{sen.}n}{\text{sen.}m-\text{sen.}n} = \frac{\text{tang.}\tfrac{1}{2}(m+n)}{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(m-n)}$$

## Nota II.

Ed essendo $\text{sen.}2\phi = 2\text{sen.}\phi.\cos.\phi$ (34); sarà, ponendo $\frac{m+n}{2}$ invece di $\phi$, $\text{sen.}2\frac{(m+n)}{2} =$ $\text{sen.}(m+n) = 2.\text{sen.}\frac{1}{2}(m+n).\cos.\frac{1}{2}(m+n)$.
Laonde dividendo la prima, e la seconda equazione della nota precedente per questa, e poi riducendo, si avrà

$$\frac{\text{sen.}m+\text{sen.}n}{\text{sen.}(m+n)} = \frac{\cos.\frac{1}{2}(m-n)}{\cos.\frac{1}{2}(m+n)}$$

$$\frac{\text{sen.}m-\text{sen.}n}{\text{sen.}(m+n)} = \frac{\cos.\frac{1}{2}(m-n)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(m+n)}$$

## Nota III.

Or dinotando per $\frac{1}{2}\phi$ un qualunque arco, è

$$\text{sen.}\phi = 2.\text{sen.}\tfrac{1}{2}\phi.\cos.\tfrac{1}{2}\phi \quad (34)$$

$$\cos.\phi = \cos.^2\tfrac{1}{2}\phi - \text{sen.}^2\tfrac{1}{2}\phi \quad (36)$$

Ed è poi il raggio $1 = \text{sen.}^2\frac{1}{2}\phi + \cos.^2\frac{1}{2}\phi$; e perciò

$$1-\cos.\phi = 2.\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}\phi,$$

$$1+\cos.\phi = 2.\cos.^2\tfrac{1}{2}\phi$$

Adunque sarà

$$\frac{\text{sen.}\phi}{1-\cos.\phi} = \frac{2.\text{sen.}\frac{1}{2}\phi.\cos\frac{1}{2}\phi}{2.\cos.^2\frac{1}{2}\phi} = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}\phi}{\cos.\frac{1}{2}\phi} = \cot.\tfrac{1}{2}\phi$$

$$\frac{\text{sen.}\phi}{1+\cos.\phi} = \frac{2.\text{sen.}\frac{1}{2}\phi.\cos.\frac{1}{2}\phi}{2.\cos.^2\frac{1}{2}\phi} = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}\phi}{\cos.\frac{1}{2}\phi} = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\phi$$

FINE.

Trigonometria Rettile e Sferica
6
A
B
C
D
E
H
K
b
B
R
S
8
F
A
B
11
D
C
Y
L
e
F
G
13
H
K
P
17
G
91
O
N.° 2